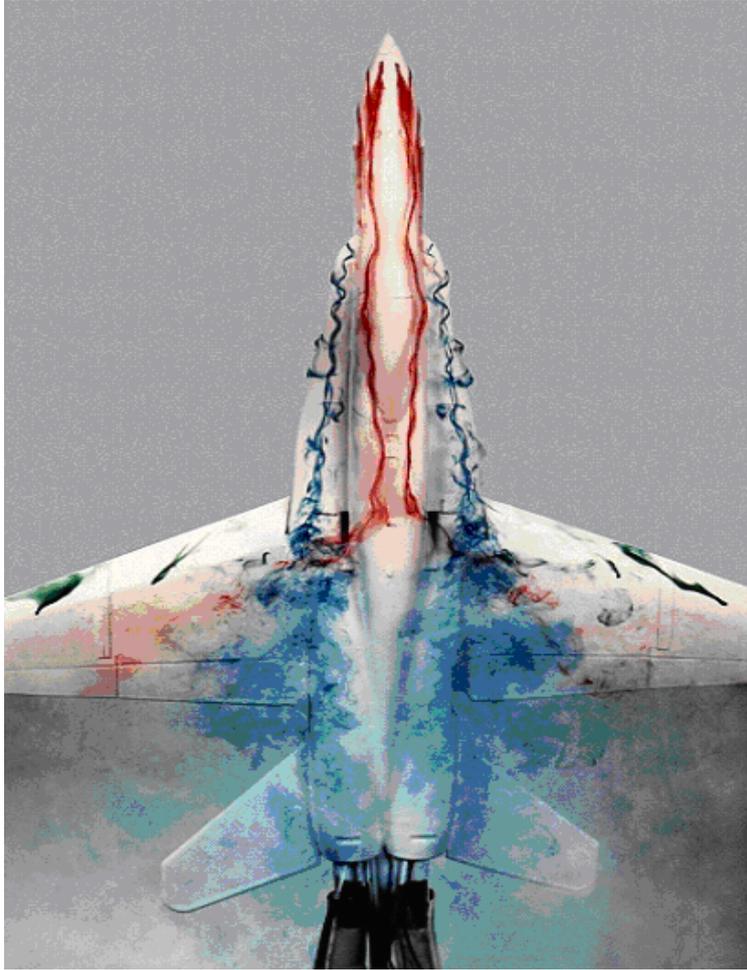


# *ELEMENTOS DE ANÁLISIS DIMENSIONAL*



*Oscar Sotolongo Costa*

*Este libro está inscrito en el Registro público del derecho de Autor con el número*

*03-2019-050312083800-01*

*Cuernavaca, México.*

*Portada: Ilustración de túnel de agua (<https://greatbustardsflight.blogspot.com/2016/11/aero-hidrodinamica-tuneles-de-agua-y-de.html>)*

## *Contenido*

<i>Contenido</i> .....	1
<i>INTRODUCCIÓN</i> .....	4
<i>Capítulo 1. Conceptos básicos</i> .....	7
1.1 <i>Permutaciones y transposiciones. Determinante de orden n</i> .....	7
1.1.1 <i>Teorema</i> .....	8
1.1.2 <i>Corolario</i> .....	8
1.1.3 <i>Paridad de las columnas y de las filas de un determinante</i> .....	10
1.1.4 <i>Corolario</i> .....	10
1.1.5 <i>Proposición</i> .....	11
1.1.6 <i>Corolario</i> .....	11
1.1.7 <i>Proposición</i> .....	11
1.2 <i>Menores y complementos algebraicos</i> .....	12
1.2.1 <i>Teorema</i> .....	12
1.2.2 <i>Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o de una columna</i> .....	12
1.2.2.1 <i>Teorema</i> .....	12
1.2.2.2 <i>Teorema</i> .....	13
1.3 <i>Sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas</i> .....	13
1.3.1 <i>Teorema</i> .....	15
1.4 <i>Rango de una matriz</i> .....	15
1.4.1 <i>Definición</i> .....	16
1.4.2 <i>Teorema sobre las transformaciones elementales</i> .....	17
1.5 <i>Noción de dependencia Lineal</i> .....	18
1.5.1 <i>Teorema</i> .....	19
1.6 <i>Sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales</i> .....	20
1.6.1 <i>Teorema</i> .....	20
1.6.2 <i>Sistemas homogéneos</i> .....	21
1.6.2.1 <i>Teorema</i> .....	21
1.6.2.2 <i>Teorema</i> .....	21

	2
1.6.2.3 Teorema.....	23
1.7 Método de Gauss.....	26
Capítulo 2. Principios del Análisis Dimensional.....	28
2.1 Magnitudes físicas.....	28
2.2 Magnitudes dependientes e independientes.....	30
2.3 Relación entre magnitudes físicas. Teorema $PI$ .....	32
2.3.1 Teorema.....	32
2.3.2 Teorema $PI$ (Buckingham, 1914).....	37
2.4 Ejemplos.....	40
2.4.1 Velocidad de olas en aguas profundas.....	40
2.4.2 Fuerza de un fluido ideal sobre un sólido.....	41
2.5 Hipótesis básicas del Análisis Dimensional.....	43
Capítulo 3. Aplicaciones simples del Análisis Dimensional.....	44
3.1 Caída Libre.....	44
3.2 Péndulo matemático.....	45
3.3 Cuerpo en un fluido ideal.....	48
3.4 Ley de Stokes.....	49
3.5 Movimiento de un líquido en tubos.....	50
3.6 Arrastre sobre una esfera.....	54
3.7 Cálculo de los monomios $PI$ .....	58
3.8 Ley de Stokes II.....	59
3.9 Caída libre II.....	61
3.10 Tercera ley de Kepler.....	62
3.11 Fuerza de arrastre sobre una esfera II.....	64
3.11.1 Teorema.....	65
3.12 Una aplicación: el teorema de Pitágoras.....	65
Capítulo 4. Más sobre los principios del Análisis Dimensional.....	67
4.1 Dimensiones y vectores.....	67
4.2 Bases dimensionales.....	67
4.2.1 Rotación de un sólido rígido.....	69
4.3 Magnitudes relativas.....	71

4.4 Algunas ecuaciones contradictorias.....	71
4.5 Información que brinda el Análisis Dimensional.....	72
4.6 Péndulo simple II.....	75
4.7 Tres reglas importantes.....	76
4.8 Relaciones espurias.....	79
4.8.1 Ley de Stokes.....	79
4.8.2 Caída libre (y péndulo simple).....	81
4.9 Influencia de las constantes universales.....	82
4.10 Discriminación de las dimensiones espaciales.....	86
4.10.1 Volumen de un paralelepípedo.....	87
4.10.2 Alcance de un proyectil.....	88
Capítulo 5. Problemas complementarios.....	92
5.1 Problemas.....	92
5.1.1 Circulación turbulenta de un fluido en una tubería.....	92
5.1.2. El problema de Boussinesq.....	95
5.1.3 Anemómetro de alambre.....	98
5.2 Consideraciones dimensionales para la pulverización del combustible.....	100
5.3 Oscilador de Hartmann.....	104
5.4 Onda de choque de la explosión nuclear (Taylor).....	107
5.5 Análisis Dimensional de las ecuaciones de balance en fluidos.....	109
5.6 Turbulencia.....	112
<a href="http://losojosdelkinetoscopio.blogspot.com/2011/01/humphrey-bogart.html">http://losojosdelkinetoscopio.blogspot.com/2011/01/humphrey-bogart.html</a> .....	112
Ya hemos visto que la turbulencia surge a partir de cierto valor del número de Reynolds, en dependencia de las condiciones experimentales.....	112
5.7 El vuelo del abejorro.....	115
Bibliografía recomendada.....	120

## INTRODUCCIÓN

*Ir por caminos desconocidos y llegar a lugares donde antes no se ha estado, generalmente le resulta más fácil a un vidente que a un ciego. La visión es el instrumento idóneo para orientarse. Eso no lo discute casi nadie. Sin embargo, no son pocos los que menosprecian el papel de la teoría, sobre todo si es abstracta, en la orientación objetiva de los trabajos experimentales, de diseño e inclusive para desarrollar innovaciones, maquinarias, etc., a pesar de que la teoría alumbró el camino a la práctica. La teoría es la visión en la ciencia.*

*En nuestra opinión esto se debe fundamentalmente al desconocimiento y a la imagen de inaccesibilidad que proyectan algunas teorías, lo cual se debe no sólo a su dificultad intrínseca para ser comprendidas, sino también a la poca divulgación que han tenido.*

*El Análisis Dimensional no escapa a lo dicho. En qué medida se cumple el que "la teoría alumbró el camino a la práctica" lo verá en este librito.*

*El Análisis Dimensional se reveló como una potente herramienta de investigación en Física e Ingeniería a principios de este siglo, aunque tiene sus antecedentes en Fourier (1822) y aun antes, con Galileo, pero se debe al primero la fundamentación rigurosa de esta disciplina, que es conocida por los matemáticos y algunos físicos. El primer capítulo tiene los conocimientos indispensables de álgebra lineal para la resolución de ecuaciones lineales y se incluyó aquí para no tener que remitir al lector a un texto de Álgebra Lineal. Si Ud. tiene estos conocimientos, puede tranquilamente saltarse su lectura. De cualquier forma, ahí estará para auxiliarlo cuando lo necesite.*

*El capítulo 2 contiene los principios básicos del Análisis Dimensional y hemos tratado desde las primeras páginas de ejemplificar la gran utilidad de esta disciplina al analizar situaciones físicas.*

*El núcleo fundamental de este capítulo es el Teorema  $\Pi$  de Buckingham, que es la piedra angular de la teoría.*

*El capítulo 3 ejemplifica en casos sencillos la aplicación del Teorema  $\Pi$ . Se profundiza en la forma de hallar los números adimensionales en cada caso. Ya con estas nociones, el lector adquiere una preparación mínima que le permite comprender mejor muchos aspectos de la modelación de sistemas e inclusive plantear y resolver algunos problemas.*

*El capítulo 4 es de gran importancia pues profundiza en las bases del Análisis Dimensional y suministra elementos para resolver problemas más complejos y también de más interés para el ingeniero. Algunos de estos problemas se tratan en el capítulo 5 y final.*

*Este libro no pretende ser un trabajo original, sino está basado en gran parte en otros libros de texto y artículos originales. Para hacer la lectura más amena, hemos omitido las referencias explícitas, pero se pueden encontrar todas las obras consultadas en la bibliografía al final.*

*Además, como este material cubre los aspectos básicos del Análisis Dimensional, sin más pretensiones, es prácticamente seguro que habrá lectores insatisfechos con la cantidad de información suministrada. La bibliografía al final puede, en nuestra opinión, satisfacer muchas exigencias y la recomendamos al lector interesado.*

*La bibliografía, hay que decirlo, se ha trabajado de manera un tanto "personal" -para no decir caprichosa- ya que se citan fuentes dentro del propio texto y al final, de manera independiente, se incluyen más citas bibliográficas. Esto obedece al criterio de que la bibliografía insertada en el*

*texto tiene mucha importancia para profundizar en el problema concreto que se está discutiendo, mientras la del final obedece más a orientación dentro del tema en general. Esto, claro está, puede ser controversial, pero "es lo que hay". Espero no moleste.*

*La forma de exposición de este material es distinta a la que aparece en los manuales tradicionales sobre esta teoría. Aquí se decidió resolver un mismo ejemplo de diferentes formas, de manera que un número relativamente pequeño de ejemplos se desarrolla varias veces desde distintos puntos de vista. Esto persigue que el énfasis principal se haga en las técnicas propias del análisis dimensional y no tanto en el problema físico en cuestión, lo cual no quiere decir que los ejemplos sean escasos, más bien lo contrario. Sin embargo la última palabra corresponde al lector.*

*Esperamos que este libro sea de utilidad al lector para orientarse en el camino de los fenómenos físicos y la experimentación. Cualquier sugerencia para mejorar este material será bien recibida.*

*Mi profundo agradecimiento a la Dra. María Teresa Pérez del Departamento de Física Teórica de la Facultad de Física de la Universidad de La Habana y al Dr. Ernesto Altshuler, mi compañero en la Cátedra Honorífica de Sistemas Complejos "Henri Poincaré" de la misma Universidad por su detallada revisión del manuscrito inicial y valiosas sugerencias.*

*Los defectos que observe el lector son responsabilidad exclusivamente mía.*

*Cuernavaca, 20 de Febrero de 2019.*

## Capítulo 1. Conceptos básicos

Para facilitar el uso de este material se ha incluido este capítulo, en el que se exponen conceptos fundamentales referentes a la solución de sistemas de ecuaciones. El lector que no tenga dificultades en estos aspectos puede ir directamente al segundo capítulo. Este primer capítulo es de importancia esencial ya que en una gran medida el éxito en la aplicación de los métodos de análisis dimensional se garantiza en la medida en que se resuelvan correctamente los sistemas de ecuaciones que surgen.

La gran mayoría de los Teoremas (excepto uno) se enuncia sin demostraciones. Comencemos viendo las definiciones de permutación, transposición y determinante.

### 1.1 Permutaciones y transposiciones. Determinante de orden $n$

Sean dados  $n$  elementos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (que pueden ser, por ejemplo, los números  $(1, 2, 3, \dots, n)$ ). Como se sabe, se llaman **permutaciones** de  $n$  elementos a todas las ordenaciones posibles de estos elementos. Con  $n$  elementos se puede formar un total de  $n!$  permutaciones (demuéstrese esto).

Si un par  $(a_i, a_k)$  de elementos de una permutación aparece en esta de modo que el elemento con mayor índice antecede al elemento con menor índice, se dice que estos forman una *inversión*.

Supongamos que debemos encontrar el número de inversiones que presenta una permutación cualquiera formada por los números naturales  $(1, 2, 3, \dots, n)$  (estos pueden ser los índices de los elementos). Para ello se puede proceder así: Calculemos primero el número de elementos que anteceden a la unidad; todos estos elementos, y solo ellos, forman inversiones con la unidad.

Tachemos después la unidad y calculemos el número de elementos que anteceden al dos; estos serán todos aquellos elementos que forman inversión con el dos (sin tomar en consideración la unidad tachada que también puede formar una inversión con el dos; pero en dicho caso esta inversión ha sido ya fijada anteriormente). Tachemos luego el dos y calculemos el número de elementos que anteceden al tres, etc. Sumemos todos los números obtenidos; esta suma será igual precisamente al número total de inversiones. El número de inversiones en la permutación  $i_1, i_2, \dots, i_n$  se indica así:  $[i_1, i_2, \dots, i_n]$  Por ejemplo:

$$[2, 5, 1, 4, 7, 3, 6] = 2 + 0 + 3 + 1 + 0 + 1 = 7$$

Las permutaciones que presentan un número par de inversiones se llaman **pares** y las permutaciones que presentan un número impar de inversiones se llaman permutaciones **impares**.

Sea  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k, \dots, a_n$  una permutación dada de  $n$  elementos. Pongamos cada uno de los elementos  $a_i$  y  $a_k$  en el lugar del otro; obtendremos así la permutación  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_i, \dots, a_n$ . Esta operación de traslado de dos elementos de una permutación se llama **transposición**.

### 1.1.1 Teorema

Una transposición altera la paridad de la permutación (es decir, una permutación par se hace impar y una permutación impar se hace par).

### 1.1.2 Corolario

El número de permutaciones impares de  $n$  elementos es igual al número de permutaciones pares (y por consiguiente, es igual a  $\frac{n!}{2}$ ).

*Demos ahora la definición general de un determinante. Sea dada una tabla cuadrada (una matriz de orden  $n$ ).*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*Los números  $a_{ik}$  se llaman elementos de la misma; las líneas horizontales de elementos se llaman filas y las verticales, columnas de la misma. Se llama determinante de esta matriz (determinante de orden  $n$ ) a la suma algebraica de todos los productos posibles de elementos formados de modo que haya un factor de cada fila y uno de cada columna de la matriz  $A$ . Si en cada uno de estos productos (términos de determinante) los factores se colocan en el orden de secuencia de las columnas, se toman con el signo positivo aquellos productos para los cuales es par la permutación formada por los primeros índices y con el signo negativo aquellos para los cuales esta permutación es impar.*

*Resumiendo:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \dots, i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones posibles de los números  $1, 2, 3, \dots, n$ . El determinante de orden  $n$  contiene  $n!$  términos, ya que el número de permutaciones de  $n$  elementos es igual a  $n!$ . Debido al corolario del teorema anterior, justamente la mitad de estos términos aparecen en el determinante con el signo más y la misma cantidad, con el signo menos. Es necesario observar que el determinante es un número, a diferencia de la matriz, que es un cuadro de números. A menudo surgen confusiones en este aspecto, sin razón de ser.

### 1.1.3 Paridad de las columnas y de las filas de un determinante

El valor de un determinante no varía si este se **traspone**, es decir, si se cambia cada una de sus filas por la columna del mismo número, o sea que:

Si se cambian entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, el determinante cambia solo de signo, pero su valor absoluto no varía.

### 1.1.4 Corolario

Un determinante que tiene dos filas o dos columnas idénticas es igual a cero.

### 1.1.5 Proposición

Si se multiplican todos los elementos de una fila o de una columna de un determinante por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por este mismo número.

Por consiguiente un factor común de todos los elementos de una fila o de una columna de un determinante puede ser separado como el factor del determinante.

### 1.1.6 Corolario

Un determinante con dos filas o dos columnas proporcionales es igual a cero.

### 1.1.7 Proposición

Si todo elemento de la  $k$ -ésima columna de un determinante viene dado como la suma de dos sumandos:  $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ , es decir, si:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1k} + c_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k} + c_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nk} + c_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix},$$

entonces se puede representar  $D$  como la suma de dos determinantes en la forma siguiente:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

Una afirmación análoga es válida también para las filas.

## ***1.2 Menores y complementos algebraicos***

Se llama **menor**  $M_{ik}$  del elemento de un determinante  $D$  de orden  $n$  al determinante de orden  $n-1$  que se obtiene suprimiendo en  $D$  la  $i$ -ésima fila y la  $k$ -ésima columna.

Se llama **complemento algebraico**  $A_{ik}$  del elemento  $a_{ik}$  a su menor tomado con el signo:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

### ***1.2.1 Teorema***

Si en un determinante  $D$  de orden  $n$  todos los elementos de la  $k$ -ésima columna (fila), a excepción de uno, son iguales a cero, el determinante es igual al producto de este elemento diferente de cero por su complemento algebraico.

### ***1.2.2 Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o de una columna***

#### ***1.2.2.1 Teorema***

Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una de sus filas (columnas) cualquiera por los correspondientes complementos algebraicos.



Multipliquemos por  $A_{11}$  la primera ecuación del sistema, por  $A_{21}$  la segunda, etc., por  $A_{n1}$  la última y sumemos todas las ecuaciones. Obtendremos la ecuación:

$$x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\dots+a_{n2}A_{n1})+\dots+x_n(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\dots+a_{nn}A_{n1})=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1} \quad (1.3.1)$$

es decir,

$$x_1D = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \quad (1.3.2)$$

ya que los coeficientes de las incógnitas  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , comprendidos en los paréntesis de la ecuación, son iguales a cero y el coeficiente de  $x_1$  es igual a  $D$ . Además, para el segundo miembro se tiene:

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = D_1 \quad (1.3.3)$$

Donde  $D_1$  es el determinante que se obtiene de  $D$  sustituyendo su primera columna por la columna de los términos independientes. (En el segundo miembro de las igualdades (1.3.1) y (1.3.2) aparece el desarrollo del determinante  $D_1$  por la primera columna).

Además

$$x_2 D = D_2, \dots, x_n D = D_n \quad (1.3.4)$$

donde  $D_i$  es el determinante que se obtiene de  $D$  sustituyendo la  $i$ -ésima columna por la columna de los términos independientes. El sistema formado por las ecuaciones (1.3.2) y (1.3.3) es un

corolario del sistema de ecuaciones. Hemos demostrado, por consiguiente, que el sistema tiene solución, que esta será también solución del sistema (1.3.1) y (1.3.2) y que:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D} \quad (1.3.5)$$

Las fórmulas (1.3.5) se llaman **fórmulas de Cramer**.

Realizando la sustitución directa de estos valores de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema, se puede comprobar que forman efectivamente una solución del mismo.

### 1.3.1 Teorema

En el caso en que  $D = 0$  el sistema tiene una solución única determinada por las fórmulas de Cramer

### 1.4 Rango de una matriz

Consideremos de nuevo las tablas de números (matrices) pero sin exigir ahora que el número de filas de la matriz sea igual al número de sus columnas. Introduciremos para estas matrices (rectangulares) el importante concepto de **rango**.

Consideremos una matriz rectangular formada por  $m$  filas y  $n$  columnas (una matriz  $[m \times n]$ ).

Sea  $k \leq m$  y  $k \leq n$ . Fijemos en esta matriz cualesquiera  $k$  filas y  $k$  columnas. Con los elementos que figuran en los cruces de las filas y de las columnas fijadas se puede formar un determinante de orden  $k$ . Todos los determinantes de este tipo se llaman menores de esta matriz. Es obvio que de una  $[m \times n]$ -matriz se puede formar  $C_m^k \cdot C_n^k$  menores de orden  $k$ . Por ejemplo, dada la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede formar  $C_4^1.C_3^1 = 12$  menores de orden 1 que vienen a ser los propios elementos de la

matriz  $\mathbf{A}$  se puede formar  $C_4^2.C_3^2 = 6.3 = 18$  menores de segundo orden:  $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

y se puede formar  $C_4^3.C_3^3 = 4$  menores de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

#### 1.4.1 Definición

Se llama **rango de una matriz** el orden máximo de sus menores diferentes de cero.

Por ejemplo, Es fácil comprobar que todos los menores de tercer orden de la matriz  $\mathbf{A}$  son iguales a cero y que no todos los menores de segundo orden son iguales a cero (el primero de los menores escritos de orden dos ya es diferente de cero). En este caso diremos que el rango de la matriz  $\mathbf{A}$  es igual a 2 y denotaremos  $r(\mathbf{A}) = 2$ .

Se llaman transformaciones elementales de una matriz las siguientes transformaciones de la misma:

- 1.- La transposición, es decir la sustitución de toda la fila por la columna del mismo número y viceversa.
- 2.-El cambio entre sí de dos filas o de dos columnas.
- 3.- La multiplicación de todos los elementos de una fila o de una columna por cualquier número  $c$  diferente de cero.
- 4.- La adición a todos los elementos de una fila o de una columna de los elementos correspondientes de una línea paralela multiplicados por un mismo número.

#### 1.4.2 Teorema sobre las transformaciones elementales

El rango de una matriz no varía en las transformaciones elementales

Ejemplo:

Calcúlese, empleando las transformaciones elementales, el rango de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

considerada al principio del párrafo.

Solución:

Restando de la tercera fila la primera duplicada, dividiendo la segunda columna por 2 y restando después de la primera columna la segunda triplicada, de la tercera columna la segunda y de la cuarta columna la segunda duplicada, obtenemos consecutivamente:

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

donde el signo  $\sim$  significa que las matrices que él une se obtienen una de la otra mediante transformaciones elementales y tienen, por consiguiente, el mismo rango.

Agregando ahora a la tercera fila la segunda triplicada, dividiendo la primera columna por 2, agregándola a la tercera columna, restándola de la cuarta columna y finalmente, cambiando entre sí las dos primeras columnas, obtendremos:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos de nuevo que el rango de la matriz  $A$  es igual a 2.

### 1.5 Noción de dependencia Lineal

Si indicamos por:

$$\mathbf{e}_1 = (3, 2, 1, 2), \quad \mathbf{e}_2 = (2, 0, -1, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 4, 5, 1),$$

las filas de la matriz  $A$ , es evidente que tiene lugar la igualdad:

$$\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$$

comprendida en el sentido de adición término por término: todo elemento de la fila  $\mathbf{e}_3$  es igual al correspondiente elemento de la fila  $\mathbf{e}_1$  multiplicado por 2 menos el correspondiente elemento de la fila  $\mathbf{e}_2$  multiplicado por 3:

En general, siendo  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$  filas de una matriz  $\mathbf{A}$  y siendo por ejemplo:

$$\mathbf{e}_m = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}, \quad (1.5.1)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  son unos números cualesquiera, diremos que la  $m$ -ésima fila de esta matriz se expresa linealmente en términos de sus primeras  $m-1$  filas o que la fila  $\mathbf{e}_m$  es una combinación lineal de las filas  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{m-1}$ . De la igualdad (1.5.1) se deduce que

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{e}_{m-1} - \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$$

donde el cero del segundo miembro es comprendido como la fila nula (es decir, como la fila formada por  $n$  ceros).

Diremos que las filas  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$  de una matriz  $\mathbf{A}$  son linealmente dependientes, si se pueden encontrar números  $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$  no todos iguales a cero, tales que:

$$\mathbf{e}_m = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \dots + y_{m-1} \mathbf{e}_{m-1} = \mathbf{0} \quad (1.5.2)$$

Si tales números  $y_i$  no existen, es decir, si la igualdad (1.5.2) tiene lugar sólo en el caso en que todos los  $y_i = 0$ , se dice que las filas  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$  son linealmente independientes.

### 1.5.1 Teorema

*Sobre el rango de una matriz*

Siendo  $r$  el rango de una matriz se puede encontrar en esta matriz  $r$  filas (columnas) linealmente independientes en términos de las cuales se expresan linealmente todas las demás filas (columnas).



Para que el sistema (1.6.1) sea compatible es necesario y suficiente que el rango de la matriz ampliada  $\mathbf{B}$  sea igual al rango de la matriz de los coeficientes.

### 1.6.2 Sistemas homogéneos

Las ecuaciones lineales homogéneas son las ecuaciones en las que el segundo miembro es igual a cero:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1.6.2.1}$$

Este sistema es siempre compatible ya que posee, por ejemplo, la solución **nula**:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

(es decir, la solución en la que los valores de **todas** las incógnitas son iguales a cero).

Es importante saber bajo qué condiciones el sistema homogéneo (1.6.2.1) tiene soluciones no nulas. La respuesta a este problema viene dada por el teorema siguiente.

#### 1.6.2.1 Teorema

Para que el sistema (1.6.2.1) tenga soluciones no nulas es necesario y suficiente que el rango  $r$  de la matriz de los coeficientes sea menor que  $n$ .

#### 1.6.2.2 Teorema

Para que un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas posea soluciones no nulas es necesario y suficiente que su determinante  $D$  sea igual a cero.

Sea  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$  una solución no nula del sistema homogéneo (1.6.2.1). Podemos considerar esta solución como una fila  $\mathbf{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  formada por  $n$  elementos. En este caso la fila:

$$c\mathbf{e}_1 = (c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_n)$$

será, evidentemente, una solución del sistema (1.6.2.1). Además, siendo

$$\mathbf{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

otra solución cualquiera del sistema (1.6.2.1), la combinación lineal de estas soluciones

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1, c_1\alpha_2 + c_2\beta_2, \dots, c_1\alpha_n + c_2\beta_n)$$

también será una solución del sistema cualesquiera que sean los valores de  $c_1$  y  $c_2$  ya que de

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = 0$$

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{in}\beta_n = 0,$$

resulta

$$a_{i1}(c_1\alpha_1 + c_2\beta_1) + a_{i2}(c_1\alpha_2 + c_2\beta_2) + \dots + a_{in}(c_1\alpha_n + c_2\beta_n) = 0$$

Luego, cualquier combinación lineal de soluciones del sistema homogéneo (1.6.2.1) será también una solución del mismo. Es interesante por esto hallar soluciones linealmente independientes del sistema en términos de las cuales se expresen linealmente todas las demás soluciones de este.

Un sistema linealmente independiente  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  de soluciones de las ecuaciones (1.6.2.1) se llama fundamental si toda solución del sistema es una combinación lineal de las soluciones

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k.$$



$$x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, \dots, x_n = 0$$

y calculando los respectivos valores  $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_r = \beta_r$  de las restantes incógnitas, obtenemos la fila  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 1, 0, \dots, 0$ , etc. De esta forma obtendremos un total de  $k = n - r$  soluciones del sistema (1.6.2.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, 1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 1, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_k &= (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Estas  $k$  filas son linealmente independientes, ya que forman una matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_r & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \dots & \beta_r & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \dots & \xi_r & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

de rango igual exactamente a  $k$ . (Esta matriz contiene un menor de orden  $k$  por ejemplo, el formado por las últimas  $k$  columnas diferente de cero.)

Demostremos ahora que la solución es  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ . Sea, pues,

$$\mathbf{e} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r, \vartheta_{r+1}, \dots, \vartheta_n)$$

una solución cualquiera del sistema (1.6.2.2). Consideremos la fila:

$$\mathbf{e}_o = \mathbf{e} - \vartheta_{r+1} \mathbf{e}_1 - \vartheta_{r+2} \mathbf{e}_2 - \dots - \vartheta_n \mathbf{e}_k$$

Es fácil ver que todos los elementos que figuran en las  $k$  últimas posiciones de esta fila son iguales a cero, es decir,

$$\mathbf{e}_o = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r, 0, 0, \dots, 0)$$

La fila  $\mathbf{e}_o$  es una solución del sistema (1.6.2.1), porque es una combinación lineal de soluciones.

Pero como los valores de todas las incógnitas libres en  $\mathbf{e}_o$  son iguales a cero, del sistema (1.6.2.2) cuyo determinante es diferente de cero y que, además, es en este caso homogéneo obtenemos que los valores de las restantes incógnitas en  $\mathbf{e}_o$  son también iguales a cero, es decir, que  $\mathbf{e}_o$  es la fila nula:

$$\mathbf{e}_o = \mathbf{e} - \mathcal{G}_{r+1}\mathbf{e}_1 - \mathcal{G}_{r+2}\mathbf{e}_2 - \dots - \mathcal{G}_n\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, 0),$$

que es lo que se quería demostrar.

Observemos que para obtener un sistema fundamental de soluciones podemos asignar a las incógnitas libres otros valores cualesquiera siempre que el determinante correspondiente de orden  $k$  sea diferente de cero. De esta forma podemos obtener tantos sistemas fundamentales de soluciones (cada uno compuesto de  $k = n - r$  filas) como se quiera. Se puede demostrar que todo sistema fundamental de soluciones está formado por exactamente  $n - r$  elementos (esto se deducirá de los resultados del capítulo siguiente).

Luego, podemos decir que la solución general del sistema (1.6.2.1) de ecuaciones lineales homogéneas es de la forma:

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{e}_k,$$

donde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$  es un sistema fundamental cualquiera de soluciones y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  son unos números arbitrarios. Queremos además llamar la atención del lector al hecho de que este es el

único teorema que se presenta aquí con su demostración. Esto es por la importancia que, en nuestra opinión, tiene el mismo en el resto del material.

### 1.7 Método de Gauss

Las formulas de Cramer, de gran interés teórico, no tienen, sin embargo, importancia seria en la práctica ya que su aplicación está sujeta a cálculos demasiado voluminosos. Para la solución práctica de los sistemas de ecuaciones lineales se emplea con mayor frecuencia el método de Gauss que consiste en la eliminación sucesiva de las incógnitas según el esquema siguiente. Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

se escribe las matriz ampliada de este sistema

$$B = \left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

donde la raya separa la columna de los términos independientes, y después se realizan transformaciones elementales con las filas de la matriz  $\mathbf{B}$ : se permite cambiar el orden de las filas (lo que equivale el orden de las ecuaciones), multiplicar las filas por cualesquiera números diferentes de cero (lo que corresponde a la multiplicación de las respectivas ecuaciones por estos números) y agregar a cualquier fila de la matriz  $\mathbf{B}$  cualquier otra fila multiplicada por un número arbitrario (lo que corresponde a la adición de una ecuación multiplicada por este número

*a otra ecuación del sistema). Después de estas transformaciones, se obtiene toda vez una matriz ampliada de un sistema nuevo, equivalente al inicial. Se trata de reducir la matriz  $\mathbf{B}$  a una forma lo más sencilla posible que permita indicar directamente la solución del sistema.*

## Capítulo 2. Principios del Análisis Dimensional

### 2.1 Magnitudes físicas

Las magnitudes físicas se dividen, a los efectos del Análisis Dimensional, en magnitudes dimensionales y adimensionales, pero esta división es en cierta forma convencional. Por ejemplo, los ángulos son adimensionales pero el valor numérico de un ángulo depende de la unidad de medición.

Por eso el ángulo en cierta forma puede considerarse dimensional y se acepta comúnmente que si se mide en radianes el ángulo puede considerarse adimensional.

Se pueden adoptar, en principio, infinitas unidades como patrones para medir las magnitudes físicas, la combinación de las cuales forma lo que se da en llamar **sistemas de unidades**. Por ejemplo en el sistema de unidades llamado "Sistema Internacional" las unidades fundamentales son el **metro** (m), el **kilogramo** (kg) y el **segundo** (s) para la longitud, la masa y el tiempo, respectivamente.

Como unidad de intensidad de corriente se toma el **Ampere** (A), la de temperatura el **Kelvin** (K), la de intensidad de la luz la **candela** (cd) y la de cantidad de sustancia el **mol**.

Las leyes físicas se expresan a través de relaciones funcionales entre las diferentes magnitudes físicas o parámetros. Entre los parámetros determinantes debe haber obligatoriamente magnitudes con dimensiones a través de las cuales puede expresarse la dimensión de todos los parámetros dependientes. Por ejemplo, no se puede afirmar que el estado de un gas se determina

solo con dos magnitudes independientes: la temperatura y la densidad, ya que la presión tiene dimensiones independientes de las dimensiones de la temperatura  $T$  y la densidad  $\rho$ .

Simbolícemos con dos corchetes  $[ ]$  las unidades de la magnitud física en cuestión. Así, por

ejemplo, podemos escribir  $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

Supongamos que el estado de un gas se determina con  $T$ ,  $\rho$  y el calor específico a volumen

constante  $C_v$ , siendo  $[C_v] = \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^\circ\text{C}}$ .

Con esto podemos decir que la presión puede expresarse como  $p = f(T, \rho, C_v)$ . Por cuanto las unidades de presión pueden expresarse a través de estas magnitudes, puede verse que una combinación adimensional es

$$\frac{P}{JC_v\rho T} = c_1$$

donde  $c_1$  es un número y  $J$  el equivalente mecánico del calor.

Entonces puede expresarse

$$P = \rho RT, \quad (2.1)$$

donde

$$R = cJC_v.$$

La ecuación (2.1) es la conocida **ley de Clapeyron**, la cual ahora podemos considerar como una consecuencia de la hipótesis de que la presión, la densidad, la temperatura y el calor específico están enlazados entre sí mediante una relación con sentido físico.

## 2.2 Magnitudes dependientes e independientes

Señalemos con los símbolos  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T}$  las unidades de masa longitud y tiempo expresadas en cualquier sistema de unidades. En Mecánica estas tres magnitudes pueden considerarse como fundamentales ya que ninguna de ellas puede expresarse en función de las otras dos, al menos en la formulación actual de la mecánica. Existen otras magnitudes, llamadas derivadas, cuyas unidades son combinaciones de estas. Así, las unidades de velocidad son del tipo  $LT^{-1}$  (longitud sobre tiempo), las de energía  $ML^2T^{-2}$ , etc.

Si una magnitud física en mecánica se expresa con unidades que son productos de potencias de  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{T}$ , esto es  $M^xL^yT^z$  se dice que  $x$ ,  $y$ , y  $z$  son las dimensiones de esta magnitud física en el sistema de unidades fundamentales  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T}$ .

Es posible cambiar el sistema de unidades fundamentales, por ejemplo tomar como unidad fundamental en lugar de la unidad de masa, la unidad de fuerza (sistema  $\mathcal{FLT}$ ).

Hablando en otros términos, si trabajamos en el sistema  $\mathcal{MLT}$  las unidades fundamentales pueden ser kilogramo, metro y segundo, con las definiciones ya conocidas para estas magnitudes.

En el sistema  $\mathcal{FLT}$  las unidades fundamentales correspondientes a las anteriores son el kilogramo-fuerza y de nuevo el metro y el segundo, entendido el kilogramo-fuerza como el peso de un cuerpo cuya masa es un kilogramo en el campo gravitatorio terrestre.

Puede también ampliarse el conjunto de unidades fundamentales, por ejemplo, para incluir fenómenos térmicos se incluye generalmente la unidad de temperatura  $K$  o de calor  $Q$ .

Por otro lado es conveniente señalar que el número de unidades fundamentales pueden ser menor que 3. Por ejemplo, si en la conocida ley de gravitación universal:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde  $\gamma$  es la constante de Cavendish con unidades  $[\gamma] = M^{-1}L^3T^{-2}$ , si tomamos dicha constante como unidad y sin dimensiones, entonces la masa se determina como función de  $L$  y  $T$ :

$$[m] = L^3T^{-2} = M$$

Por lo tanto la unidad de masa en este sistema se determina por  $L$  y  $T$ . Tomando  $\gamma$  como adimensional tenemos solo dos unidades fundamentales.

Puede llevarse el número de unidades fundamentales a uno si tomamos como constante absoluta adimensional otra constante física, por ejemplo el coeficiente de viscosidad  $\nu$  del agua o la velocidad de la luz  $c$ .

Y al final, pueden llevarse todas las magnitudes físicas a magnitudes adimensionales tomando, por ejemplo,  $\gamma, \nu$  y  $c$  absolutas y adimensionales (aclaremos que por "absoluto" en esta teoría entendemos como **independiente del sistema de unidades**. En este caso se excluye la posibilidad de uso de distintos sistemas de unidades. Se obtiene un sistema natural de unidades, basado en las constantes escogidas.

Sin embargo, tal sistema no es cómodo. La práctica ha consagrado como más factible en mecánica un sistema con tres unidades fundamentales donde las magnitudes físicas tengan formulas dimensionales del tipo:  $M^x L^y T^z$  o sea un monomio formado por potencias de esas unidades.

*Esto está determinado por el hecho de que la relación entre dos magnitudes físicas iguales no puede depender del sistema de unidades, o sea de la escala de medición de las magnitudes físicas fundamentales. Por ejemplo, la relación entre dos masas es la misma en cualesquiera unidades de medida (kg, lb, g, etc.) dando siempre  $\frac{m_1}{m_2} = cte$ , por lo que si la masa de un cuerpo es el doble de la otra, esto no depende del sistema de unidades. Esta aseveración es igualmente válida para el resto de las magnitudes físicas (o sea, volumen, fuerza, etc.).*

### **2.3 Relación entre magnitudes físicas. Teorema PI**

*Comencemos preguntándonos: ¿Cómo se expresan las unidades de las magnitudes físicas?*

#### **2.3.1 Teorema**

*Las dimensiones de las magnitudes físicas siempre se expresan a través de monomios de potencias de estas dimensiones.*

*Demostración.*

*Consideremos un cierto sistema de unidades de medición  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$  por lo tanto las dimensiones de cualquier magnitud  $a$  depende solo de  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$*

$$[a] = \varphi(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots)$$

*Dentro de la clase  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$  escogamos 3 sistemas de unidades: (0), (1), (2) donde (1) se obtiene de (0) disminuyendo las unidades de medición en  $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \dots$  veces.*

*(2) se obtiene de (0) disminuyendo en  $\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \dots$  veces.*

$$(0) \rightarrow (1) \Rightarrow a^{(1)} = \varphi(P_1, Q_1, \dots) a^{(0)}$$

$$(0) \rightarrow (2) \Rightarrow a^{(2)} = \varphi(P_2, Q_2, \dots) a^{(0)}$$

$$\frac{a^{(1)}}{a^{(2)}} = \frac{\varphi(P_1, Q_1, \dots)}{\varphi(P_2, Q_2, \dots)}$$

Por otro lado el paso entre (2) y (1) depende solo de ambos sistemas y no del que fue escogido

como (0). Las relaciones de las unidades fundamentales son:  $\frac{P_1}{P_2}, \frac{Q_1}{Q_2}, \dots$

Por lo tanto el valor de  $a$  ante esta transición debe incrementarse en  $\varphi\left(\frac{P_1}{P_2}, \frac{Q_1}{Q_2}, \dots\right)$

$$\frac{\varphi(P_1, Q_1, \dots)}{\varphi(P_2, Q_2, \dots)} = \varphi\left(\frac{P_1}{P_2}, \frac{Q_1}{Q_2}, \dots\right)$$

Derivemos esta igualdad respecto a  $P_1$  y hagamos  $P_1=P_2=P, Q_1=Q_2=Q, \dots$  etc. Entonces

obtenemos:

$$\frac{\varphi'_P(P, Q, \dots)}{\varphi(P, Q, \dots)} = \frac{1}{P} \varphi'_P(1, 1, \dots) = \frac{\alpha}{P} \quad \text{con } \alpha = \text{constante. Integrando se obtiene:}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\varphi} = \alpha \frac{\partial P}{P}$$

$$\varphi(P, Q, \dots) = P^\alpha \varphi_1(Q, \dots),$$

con  $\varphi_1 \neq \varphi_1(P)$ , o sea es una función que no depende de  $P$ .

Repetiendo el proceso para las demás variables ( $Q$ , etc.) tenemos:

$$\varphi = [a] = P^\alpha Q^\beta \dots \text{cte}$$

Podemos hacer el factor cte. =1 pues para  $P=Q=1$  el sistema de unidades no se altera, ni tampoco

hay cambios en el valor numérico de  $a$ . Por lo tanto  $[a] = P^\alpha Q^\beta \dots$

Entonces llegamos a la conclusión de que las dimensiones de las magnitudes físicas siempre vienen expresadas como monomios de potencias.

Sea una magnitud dimensional  $a$  expresable mediante magnitudes dimensionales  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2.3.1)$$

Supongamos que de estas, las  $a_1, a_2, \dots, a_k$  tienen dimensiones independientes. Independencia de las dimensiones significa, como ya hemos dicho, que la fórmula que expresa la dimensionalidad de una de las magnitudes no puede representarse como combinación en forma de monomios de potencia de la fórmula de dimensiones de otras magnitudes (fórmula dimensional).

Entre las magnitudes mecánicas a menudo se tiene no más de 3 con dimensiones independientes.

Si hay  $K$  parámetros con dimensiones independientes, pueden expresarse las dimensiones de  $a_{k+1}, \dots, a_n$  en función de los  $k$  restantes.

Designemos las dimensiones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [a_1] &= A_1 \\ [a_2] &= A_2 \\ &\vdots \\ [a_k] &= A_k \end{aligned}, \quad (2.3.2)$$

entonces podemos hacer:

$$\begin{aligned} [a] &= A_1^{m_1} \dots A_k^{m_k} \\ &\vdots \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} \dots A_k^{p_k} \\ [a_n] &= A_1^{q_1} \dots A_k^{q_k} \end{aligned}$$

El sistema anterior expresa las fórmulas dimensionales de las magnitudes físicas con unidades dependientes.

Hagamos ahora un cambio de unidades de modo que las magnitudes con unidades independientes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  pasen a  $a'_1, a'_2, \dots, a'_k$  dados por:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \alpha_1 a_1 \\ a'_2 &= \alpha_2 a_2 \\ &\vdots \\ a'_k &= \alpha_k a_k \end{aligned},$$

donde los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  son los factores de conversión que llevan las magnitudes de un sistema de unidades a otro. De (2.3.2) puede verse que, con ese cambio de unidades tenemos que las restantes magnitudes físicas cambian de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1} \\ &\vdots \\ a'_n &= \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a_n \\ a' &= \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} a \end{aligned} \quad (2.3.2.a)$$

Entonces en el nuevo sistema de unidades que hemos tomado la relación funcional (2.3.1) se transforma en:

$$a' = f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k} a_n) \quad (2.3.3)$$

Pero la última relación del sistema (2.3.2.a) se puede escribir en la forma:

$$a' = f(\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k}) f(a_1, \dots, a_n) \quad (2.3.4)$$

La comparación de (2.3.3) y (2.3.4) demuestra que  $f(a_1, \dots, a_n)$  es una función homogénea respecto a la escala  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tomada al cambiar de unidades.

Ahora podemos preguntarnos si existe algún cambio de unidades que simplifique al máximo posible la relación (2.3.3). Surge de forma inmediata buscar aquel sistema de unidades en que:

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \dots, \alpha_k = \frac{1}{a_k},$$

o sea, de modo que los  $k$  primeros argumentos sean iguales a la unidad. En este sistema los valores de  $a, a_{k+1}, \dots, a_n$  se determinan por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{a}{\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k}} \\ \pi_1 &= \frac{a_{k+1}}{\alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k}} \\ &\vdots \\ \pi_{n-k} &= \frac{a_n}{\alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_k^{q_k}} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Los valores  $\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}$  no dependen de la elección del sistema de unidades, ya que tienen dimensión nula respecto a las unidades  $A_1 \dots A_k$ . Utilizando este sistema de unidades relativo se puede hacer que la relación (2.3.3) sea:

$$\pi = f(1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) \tag{2.3.6}$$

Obsérvese que (2.3.6) es una relación entre magnitudes sin dimensiones y, por tanto, independientes del sistema de unidades. Los monomios que entran en esta relación, dados por (2.3.5) se llaman monomios  $\pi$ . Algunos autores (Ver Rey Pastor, *Análisis Matemático Tomo III*) los llaman "productos nildimensionados". Aquí usaremos indistintamente ambos nombres.

Así, la relación entre  $n+1$  magnitudes dimensionales  $a, a_1, \dots, a_n$  independientes del sistema de unidades toma la forma de relación entre  $n+1-k$  productos nildimensionados  $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}, \pi$ . En otras palabras:

### 2.3.2 Teorema PI (Buckingham, 1914)

Sea  $a = f(a_1, \dots, a_n)$ .

De las  $n$  variables, las  $k$  primeras  $a_1, \dots, a_k$  tienen dimensiones independientes

Entonces  $a_{k+1}, \dots, a_n$  pueden expresar sus dimensiones en función de las  $k$  primeras.

$$\left. \begin{array}{l} [a_1] = A_1 \\ \vdots \\ [a_k] = A_k \end{array} \right\} .$$

Por lo tanto

$$\left. \begin{array}{l} [a] = A_1^{m_1} \cdots A_k^{m_k} \\ [a_{k+1}] = A_1^{p_1} \cdots A_k^{p_k} \\ \vdots \\ [a_n] = A_1^{q_1} \cdots A_k^{q_k} \end{array} \right\} \text{ como ya vimos antes}$$

Hagamos ahora un cambio de unidades

$$\left. \begin{array}{l} a'_1 = \alpha_1 a_1 \\ a'_2 = \alpha_2 a_2 \\ \vdots \\ a'_k = \alpha_k a_k \end{array} \right\} \quad (2.3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} a'_{k+1} &= \alpha_1^{p_1}, \alpha_2^{p_2}, \dots, \alpha_k^{p_k} a_1 \\ a'_n &= \alpha_1^{q_1}, \alpha_2^{q_2}, \dots, \alpha_k^{q_k} a_n \\ &\vdots \\ a' &= \alpha_1^{m_1}, \alpha_2^{m_2}, \dots, \alpha_k^{m_k} a_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.8)$$

Entonces

$$a' = f\left(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \dots, \alpha_1^{p_1} \alpha_1^{p_2} \dots \alpha_k^{p_k} a_{k+1} \dots \alpha_1^{q_1} \dots \alpha_k^{q_k} a_n\right), \quad (2.3.8a)$$

pero la última relación de (2.3.7) se puede escribir:

$$a' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_k^{m_k} f(a_1 \dots a_n) \quad (2.3.9)$$

De (2.3.8a) y (2.3.9) entonces  $f(a_1 \dots a_n)$  es una función homogénea respecto a la escala  $\alpha_1 \dots \alpha_k$  tomada al cambiar de unidades.

Ahora podemos preguntarnos: ¿Existe algún cambio de unidades que simplifique al máximo (2.3.8a)?

Busquemos un sistema de unidades en que:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{a_1} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{a_2} \\ &\vdots \\ \alpha_k &= \frac{1}{a_k} \end{aligned} \right\},$$

$$\text{por lo tanto } a' = f\left(1 \dots 1, \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}} \dots \frac{a_n}{a_1^{q_1} \dots a_k^{q_k}}\right) = \frac{a}{a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k}},$$

entonces  $\pi = f(1 \dots 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k})$

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \frac{a}{a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k}} \\ \pi_1 &= \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} \dots a_k^{p_k}} \\ &\vdots \\ \pi_{n-k} &= \frac{a}{a_1^{q_1} \dots a_k^{q_k}} \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto la relación entre  $n+1$  magnitudes dimensionales, independientes del sistema de unidades adopta la forma de relación entre  $n+1-k$  productos dimensionales  $\pi, \pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ .

Así, pues:

**Una ecuación dimensionalmente homogénea puede siempre reducirse a una relación entre un sistema completo de productos nildimensionados, supuestas restringidas las variables originales a tomar sólo valores positivos.**

La anterior es una de las maneras en que se enuncia el teorema  $\mathcal{P}I$ .

Se puede cambiar el sistema  $\pi_1, \pi_2 \dots \pi_{n-k}$ , cambiando también el tipo de la función  $f$ , a otro conjunto de parámetros adimensionales que sean función de los  $n-k$  parámetros  $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ .

Cualquier parámetro adimensional que se introduzca, es función de  $\pi, \dots, \pi_{n-k}$  si el sistema es **completo**. Cuanto menor es el número de parámetros que determinan el fenómeno estudiado más limitada es la dependencia funcional. Si el número de magnitudes  $n$  es igual al número de magnitudes con unidades independientes  $k$ , o sea  $n = k$ , entonces todas las dimensiones son

independientes, por lo cual de entre los parámetros  $a_1, \dots, a_n$  no se puede formar ninguna combinación adimensional y por esto la dependencia funcional puede representarse en la forma:

$$a = ca_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n},$$

donde  $c$  es una constante y  $m_1, \dots, m_n$  se determinan por la fórmula dimensional para  $a$ .

En general  $m = 1 + n - k$  es igual al número de parámetros adimensionales en los cuales se formula la relación física y es una constante.

## 2.4 Ejemplos

### 2.4.1 Velocidad de olas en aguas profundas

Todo lo anteriormente explicado puede concretarse en el siguiente ejemplo dado por Birkhoff (ver la bibliografía):

Supongamos que la velocidad  $v$  de una ola en aguas profundas está determinada por su longitud de onda  $\lambda$  y la aceleración de la gravedad  $g$ , o sea:

$$v = f(\lambda, g)$$

Admitamos que esta relación es invariable cualesquiera que sean las unidades fundamentales de longitud y tiempo.

Tomemos una nueva unidad de longitud igual a  $\lambda$  veces la antigua y una nueva unidad de tiempo igual a  $\tau$  veces la anterior en que se expresaba. Entonces la longitud de onda en el nuevo

sistema de unidades vale  $\lambda' = 1$  y su velocidad  $v' = v \frac{\tau}{\lambda}$ ; la aceleración de la gravedad toma ahora

el valor  $g' = g \frac{\tau^2}{\lambda}$ . Tomemos ahora  $\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$  como unidad de tiempo. Entonces:

$$v' = \frac{v}{\sqrt{g\lambda}} = f(\lambda', g') = f(1, 1) = c \quad (2.4.1)$$

donde  $c$  es la velocidad que tendría una onda de longitud de onda unidad en un campo gravitatorio unidad en un cierto sistema de unidades (por tanto en cualquier sistema).

Multiplicando (2.4.1) por  $\sqrt{g\lambda}$  tenemos:

$$v = c\sqrt{g\lambda},$$

la constante  $c$  se halla en forma experimental o a partir de la teoría del fenómeno.

Veamos otro ejemplo.

#### 2.4.2 Fuerza de un fluido ideal sobre un sólido

Supongamos que la fuerza  $F$  que se ejerce por un fluido ideal (o sea, sin viscosidad) sobre un cuerpo rígido de forma dada es una fuerza de inercia en el sentido de que solo depende de la densidad  $\rho$  del fluido, de la velocidad  $v$  y del diámetro  $d$  del objeto. O sea:

$$F = f(\rho, v, d) \quad (2.4.2)$$

Tomemos como unidad de longitud  $d$ , como unidad de tiempo  $\tau$  y como unidad de masa  $\alpha$ .

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} d' &= 1 \\ v' &= \frac{v\tau}{d} \\ \rho' &= \frac{\rho d^3}{\alpha} \\ F' &= F \frac{\tau^2}{\alpha d} \end{aligned} \right\},$$

serán los nuevos valores de estas magnitudes en el nuevo sistema.

Si hacemos:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{d}{v} \\ \alpha &= \rho d^3 \end{aligned}$$

entonces (2.4.2) se convierte en

$$F' = \frac{F}{v^2 \rho d^2} = f(1,1,1) = k$$

Entonces

$$F = kv^2 \rho d^2,$$

relación que expresa la fuerza sobre el objeto en un fluido ideal. La constante

$k$  debe determinarse por otros medios, bien teóricos o experimentales.

Los razonamientos expuestos se han hecho sobre la base del cumplimiento de determinadas condiciones que pasaremos a detallar, lo que a su vez servirá para resumir y resaltar las ideas esenciales.

## 2.5 Hipótesis básicas del Análisis Dimensional

1.- Existen ciertas unidades fundamentales independientes  $a_i$  tales que, con ciertos números reales positivos  $\alpha_i (i = 1 \dots n)$  podemos cambiar de unidades mediante la transformación:

$$T(a_i) = \alpha_i a_i \quad (\alpha_i > 0) \quad (2.5.1)$$

Como ya advertimos, en Mecánica  $n = 3$ , que pueden ser  $M$ ,  $L$  y  $T$ .

2.- Existen magnitudes derivadas  $b_j$  (por ejemplo pueden ser la densidad, la velocidad, la viscosidad, etc.) que son homogéneas en el sentido de que cuando se opera el cambio de unidades (2.5.1) cada  $b_j$  se multiplica por un "factor de conversión" que vale:

$$T(b_j) = \alpha_1^{m_{j1}} \dots \alpha_n^{m_{jn}}$$

Los  $m_{jk}$  se llaman "dimensiones" de  $b_j$ . Si todos son nulos se dice que  $b_j$  es "adimensional". Evidentemente, un producto cualquiera de potencias de magnitudes homogéneas es homogéneo.

3.- La magnitud  $b_o$  puede expresarse en función de  $b_1 \dots b_n$  por una cierta relación  $f(b_1 \dots b_n)$ .

4.- La relación  $b_o = f(b_1 \dots b_n)$  es independiente de las unidades en el sentido de que permanece inalterada después de cualquier transformación del tipo (2.5.1).

5.- Las magnitudes  $b_o \dots b_n$  hacen intervenir las  $n$  magnitudes fundamentales.

## Capítulo 3. Aplicaciones simples del Análisis Dimensional

### 3.1 Caída Libre

Analicemos el fenómeno de caída libre de un cuerpo de masa  $m$  desde una altura  $h$  bajo la acción de la aceleración de la gravedad  $g$ .

El tiempo de caída es  $t$ . Con estos parámetros  $m, h, g$  y  $t$  sólo puede formarse una combinación adimensional:

$$\Pi_1 = t \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Así:

$$t = \Pi_1 \sqrt{\frac{h}{g}},$$

es el tiempo de caída libre. No es difícil hallar que  $\pi_1 = \sqrt{2}$  por cinemática elemental o experimentalmente. El Análisis Dimensional arroja mucha información sobre la dependencia funcional. Obsérvese que  $t$  no depende de  $m$ , tal como demuestra la mecánica.

El lector no familiarizado con el Análisis Dimensional puede encontrar difícil llegar al resultado

anterior, o sea, que  $t = \Pi_1 \sqrt{\frac{h}{g}}$ . Sin embargo, si tiene un poco de paciencia y continúa la lectura

verá que se puede elaborar un método para esto.

Por lo pronto, valga decir que, si tenemos en cuenta que  $[m] = M, [h] = L, [g] = LT^{-2}$  y

obviamente,  $[t] = T$  podemos darnos a la tarea de hallar qué producto (o productos) de potencias

de esas magnitudes,  $m^{\varepsilon_1} h^{\varepsilon_2} g^{\varepsilon_3} t^{\varepsilon_4}$  es adimensional, llegamos a que una solución es  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$

,  $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}$ ,  $\varepsilon_4 = 1$ . El lector aprenderá a hacerlo muy pronto, pero es un buen ejercicio intentar

hacerlo ahora. Solo exija que para las unidades de masa, longitud y tiempo la suma de los exponentes del producto sea en cada caso cero.

### 3.2 Péndulo matemático

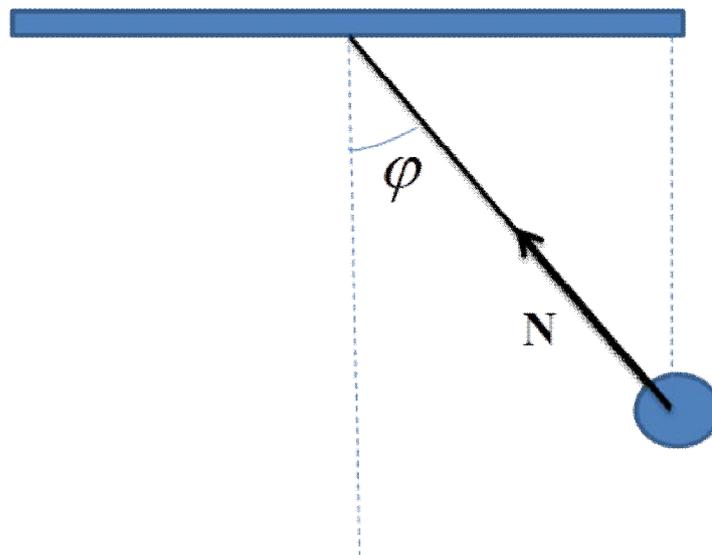


Figura 3.2.1.- Péndulo simple (esquema de autor)

Estudiamos el movimiento de un péndulo consistente en una partícula de masa  $m$  colgando de un hilo inextensible e imponderable de longitud  $l$  bajo la acción de la gravedad (Ver la figura). Si el péndulo forma instantáneamente un ángulo  $\varphi$  con la vertical, las ecuaciones del movimiento y las condiciones iniciales son:

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \\ m \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 l = N - mg \cos \varphi \\ \left. \begin{aligned} \varphi|_0 &= \varphi_0 \\ \frac{d\varphi}{dt}|_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$N$  es la tensión del hilo.

Como parámetros determinantes del sistema se pueden tomar los siguientes:

$$t, l, g, m, \varphi_0.$$

Entonces podemos plantear:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi(t, \varphi_0, l, g, m) \\ N &= N(t, \varphi_0, l, g, m) \end{aligned} \right\}$$

Estas fórmulas demuestran que la ley del movimiento no dependerá de la masa del péndulo.

Sea  $T$  el tiempo entre dos posiciones dadas del péndulo, por ejemplo entre el centro y un extremo o entre dos extremos o entre dos fases iguales (periodo). (La existencia del movimiento periódico puede tomarse como hipótesis o como resultado conocido de datos complementarios).

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} f_2(\varphi_0, l, g, m)$$

La función  $f_2$  es adimensional y como con  $L, m$  y  $g$  no se puede obtener una combinación adimensional, es evidente que  $f_2$  no depende de  $L, g$  y  $m$ . En consecuencia:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} f_2(\varphi_0). \quad (3.2.1)$$

Solo mediante el Análisis Dimensional no es posible obtener la forma de  $f_2$ . La determinación de  $f_2$  puede realizarse teóricamente sobre la base de las ecuaciones del movimiento o experimentalmente. Si  $T$  es el periodo de oscilación, por consideraciones de simetría es evidente que el valor del periodo no depende del signo de  $\varphi_0$ .

$$f_2(\varphi_0) = f_2(-\varphi_0)$$

Por lo que  $f_2$  es una función par. Suponiendo que para  $\varphi_0$  pequeño la función  $f_2$  es desarrollable en serie de potencias:

$$f_2(\varphi_0) = c_1 + c_2\varphi_0^2 + c_3\varphi_0^4 + \dots \quad (3.2.2)$$

Para pequeñas oscilaciones podemos despreciar las potencias de  $\varphi_0$  en (3.2.2) y entonces (3.2.1) da:

$$T = c_1 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La solución de las ecuaciones del movimiento para este caso arroja que  $c_1 = 2\pi$ .

Así, mediante el Análisis Dimensional hemos podido hallar el periodo de un péndulo con exactitud de un coeficiente multiplicativo.

Para establecer el sistema de parámetros del problema sirvieron las ecuaciones del movimiento, pero el mismo sistema puede establecerse sin plantear dichas ecuaciones. De hecho, para las características del péndulo hay que señalar  $l$  y  $m$ . En adelante hay que señalar  $g$  ya que el fenómeno se determina por la fuerza de gravedad. Al final hay que señalar  $\varphi_0$  y  $t$ , ya que el

movimiento en concreto se determina por el ángulo de máxima inclinación  $\phi_0$  y el instante de tiempo  $t$ .

### 3.3 Cuerpo en un fluido ideal

Como ejemplo sencillo veamos de nuevo el movimiento de un cuerpo de dimensión característica  $d$  que se mueve en un fluido no viscoso de densidad  $\rho$  con velocidad  $v$ . La relación entre estas magnitudes se expresa como:

$$F = f(\rho, v, d)$$

Tomemos como unidad de longitud a  $d$  y como unidad de tiempo a  $t$ . Expresemos la unidad de masa mediante el símbolo  $\alpha$ . Así, tenemos:

$$d' = 1$$

$$V' = V \frac{t}{d}$$

$$\rho' = \rho \frac{d^3}{\alpha}$$

$$F' = F \frac{t^2}{\alpha d}$$

Hagamos

$$t = \frac{d}{V}$$

$$\alpha = \rho d^3$$

Es decir, escogemos adecuadamente las unidades de tiempo y masa, por lo tanto

$$F' = \frac{F}{V^2 \rho d^2} = f(1,1,1) = K$$

$$\boxed{F = K \rho V^2 d^2}$$

*Y así obtenemos la fuerza que actúa sobre un objeto en un fluido ideal. La constante  $K$  debe determinarse por otros medios.*

### **3.4 Ley de Stokes**

*Hallémos la fuerza que actúa sobre una esfera de radio  $r$  que se mueve con velocidad  $v$  en un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\eta$ . Los parámetros determinantes del sistema son:*

$$F, r, \eta, \rho, v.$$

*Donde  $F$  es la fuerza.*

*Observar que aquí nos planteamos el problema con una esfera de radio  $r$  y no de un cuerpo cualquiera de dimensión característica " $d$ " ya que el líquido en este caso no es ideal, por lo que, a diferencia del ejemplo anterior, habría que considerar el problema de la turbulencia, que indefinire el resultado como veremos más adelante. Es fácil ver que una combinación adimensional entre estos parámetros es:*

$$\pi_1 = \frac{F}{r\eta v}$$

*Entonces.*

$$F = \pi_1 r \eta v, \quad (3.4.1)$$

*y se puede ver por otras vías que  $\pi_1 = 6\pi$ .*

*Hasta ahora los ejemplos citados saltan a la vista fundamentalmente como una muestra de las grandes posibilidades que brinda el Análisis Dimensional para obtener relaciones entre*

magnitudes físicas por una vía poco tradicional, al menos en lo que compete a la tradición didáctica. Sin embargo, el mayor interés que esto presenta, sobre todo para los ingenieros e investigadores, consiste en la claridad que introduce a los efectos de modelar fenómenos y construir modelos a escala con el rigor que requieren las investigaciones. El siguiente ejemplo puede ilustrar algo esta afirmación, a reservas de que en ejemplos posteriores esto quedará más claro.

### 3.5 Movimiento de un líquido en tubos

Sea un tubo de sección transversal  $S$  en el cual, por efecto de la viscosidad  $\eta$  del líquido que fluye por él con velocidad media  $\bar{u}$ , tiene una caída de presión  $P_1 - P_2$  en una longitud  $L$ .

Supongamos el tubo recto y que la forma de la sección transversal es arbitraria. Sea "a" una longitud característica de la sección transversal del tubo, (que puede ser el radio medio).

El estado de movimiento del líquido se determina con los parámetros:

$$\rho, \eta, a, \bar{u}.$$

Donde  $\rho$  es la densidad del líquido. Todas las características mecánicas del movimiento del líquido son función de estos parámetros. Formemos la combinación adimensional:

$$\psi = \frac{P_1 - P_2}{L \frac{\rho \bar{u}^2}{2a}},$$

llamada coeficiente de resistencia.

La fuerza de oposición de una sección del tubo de longitud  $L$  es:

$$F = (P_1 - P_2)S = \psi \frac{L}{a} S \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (3.5.1)$$

Con los parámetros antes citados puede formarse sólo una combinación adimensional.

$$\frac{\bar{u}a\rho}{\eta} = R, \quad (3.5.2)$$

llamada "número de Reynolds".

Entonces todas las magnitudes adimensionales dependientes de estos cuatro parámetros, son función del número de Reynolds. En particular:

$$\psi = \psi(R) \quad (3.5.3)$$

Esta ecuación es una relación entre dos magnitudes adimensionales, por lo tanto es una ley que no depende de la escala. Los parámetros en (3.5.2) pueden cambiar de forma que  $R$  sea constante, y se obtendrá el mismo valor de  $\psi$ . Por ejemplo, para un flujo de agua a lo largo de un tubo, dado un número de Reynolds, el coeficiente de resistencia tendrá el mismo valor que para un flujo de petróleo en otro tubo pero que tenga el mismo valor del número de Reynolds. Esto significa que puede modelarse un flujo de petróleo en una instalación industrial a través de un flujo de agua en un montaje de laboratorio a los efectos de la determinación del coeficiente de resistencia.

Analicemos con más detalle el fenómeno ejemplificado y veremos cómo el correcto Análisis físico del problema y el conocimiento del fenómeno permiten, a través de los métodos del Análisis Dimensional, obtener una buena cantidad de información.

La inercia del líquido, que se expresa a través de  $\rho$ , puede ignorarse cuando no hay aceleración.

Valga decir que entonces el régimen de movimiento no puede ser turbulento, sino laminar en línea recta. Así, la resistencia del tubo al movimiento del fluido no depende en este caso de  $\rho$ .

Entonces en (3.5.1) la densidad debe cancelarse, por esto  $\psi(R)$  debe ser del tipo

$$\psi = \frac{c}{R},$$

donde  $c$  es una constante adimensional determinada por la forma geométrica del tubo. Para un tubo circular puede calcularse, siendo  $c = 16$ . En consecuencia, para el caso de movimiento laminar, para la resistencia del tubo se tiene:

$$F = \frac{1}{2} \frac{S}{a^2} c \eta L \bar{u} = c_1 L \eta \bar{u}.$$

Si se conoce la caída de presión bajo la cual se mueve el líquido, entonces en calidad de parámetros es más fácil tomar las magnitudes  $\rho, \eta, a$  y además  $i = \frac{P_1 - P_2}{L}$ .

Con esto construimos un parámetro adimensional:

$$J = \frac{\rho i a^3}{\eta^2}$$

Entonces puede demostrarse que

$$J = \frac{1}{2} R^2 \psi(R).$$

En el gasto

$$Q = \bar{u} S$$

puede formarse la combinación adimensional

$$\frac{Q\rho}{\eta a} = R \frac{S}{a^2}, \quad (3.5.4)$$

por lo que (3.5.4) puede expresarse como función de  $J$  :

$$Q = \frac{\eta a}{\rho} f(J), \quad (3.5.4.a)$$

y puede estudiarse la variación del gasto con  $J$  mediante esta fórmula.

Podemos obtener más información aun si vemos en (3.5.3) que

$$R = \frac{\rho a \bar{u}}{\eta},$$

y entonces

$$\psi = \frac{c\eta}{\rho a \bar{u}} \quad (3.5.5)$$

Despejando  $\bar{u}$  en (3.5.5) y sustituyendo en (3.5.4.a):

$$Q = \frac{c\eta S}{\rho a \psi}.$$

Multiplicando por  $\frac{ia^4}{\eta}$  numerador y denominador, tenemos :

$$\boxed{Q = \frac{c}{\psi J} \frac{S}{a^2} \frac{ia^4}{\eta} = c_2 \frac{ia^4}{\eta}} \quad (3.5.6)$$

La ecuación (3.5.6) es la conocida **Ley de Poiseuille**. Para un tubo de sección circular  $c_2 = \frac{\pi}{8}$ .

Este movimiento laminar en el cual es válida (3.5.5) y, por supuesto, (3.5.3), que es lo mismo, ocurre en el rango en que  $R < 1000$ . Para  $1000 < R < 2000$  el movimiento es inestable y ya el movimiento deja de ser laminar. Para  $R > 2000$  el movimiento es turbulento.

Es importante de nuevo insistir en que la dependencia de  $\psi$  con  $R$  es universal, por lo que una gráfica de  $\psi$  contra  $R$  hecha en cualquier fluido será también válida para cualquier otro. Esta es la base de la modelación.

Veamos por último otro ejemplo análogo a este:

### 3.6 Arrastre sobre una esfera

La fuerza  $F$  de arrastre de un líquido incompresible, de velocidad  $v$ , densidad  $\rho$  y viscosidad  $\eta$  sobre una esfera lisa de diámetro  $d$ , viene dada por una dependencia del tipo :

$$F = f(v, d, \rho, \eta).$$

Con estos parámetros pueden formarse dos productos nildimensionados:

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 d^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho v d}{\eta}$$

Entonces la dependencia es

$$F = \rho v^2 d^2 \gamma \left( \frac{\rho v d}{\eta} \right) = \rho v^2 d^2 \gamma(R), \quad (3.6.1)$$

siendo  $\gamma$  una función arbitraria.

Llamamos coeficiente de arrastre  $a$ :

$$c_D = 2 \frac{1}{\rho v^2} \frac{F}{\frac{1}{4} \pi d^2} = \frac{8F}{\pi \rho v^2 d^2}$$

Entonces (3.6.1) se transforma en:

$$c_D = \frac{8}{\pi} \phi \left( \frac{\rho v d}{\eta} \right) = \frac{8}{\pi} \phi(R) \quad (3.6.2)$$

Otra vez encontramos algo muy valioso para el investigador: Una sola gráfica experimental de  $c_D$  contra  $R$  da una información completa de la fuerza de arrastre sobre esferas lisas de cualquier tamaño en líquidos incompresibles de densidad, viscosidad y velocidad cualesquiera. Para hallar experimentalmente  $F = \gamma(v, d, \rho, \eta)$  sin el Análisis Dimensional hubieran sido necesarios cerca de 25 gráficos que mostrasen separadamente los efectos de las variables  $v, d, \rho, \eta$ .

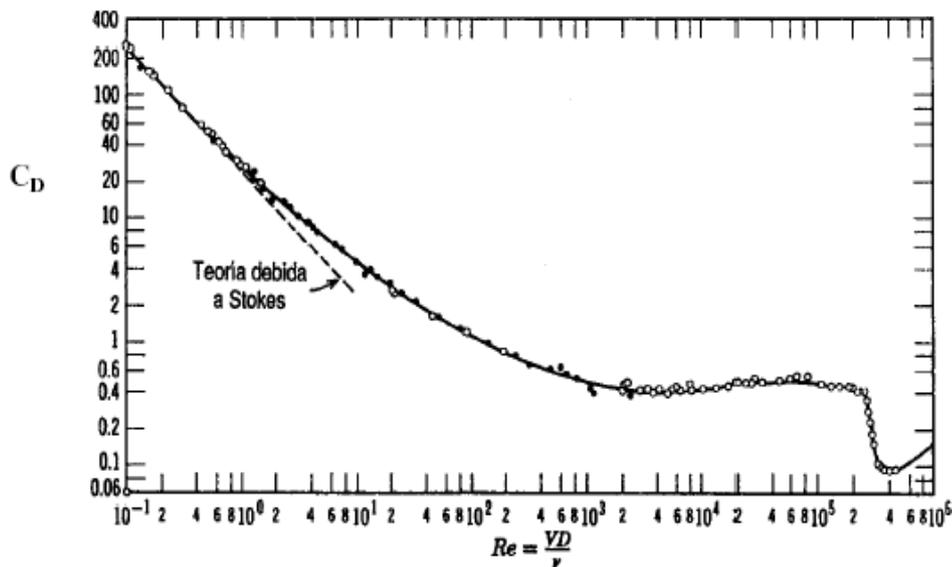


Figura 3.6.1.- Coeficiente de arrastre de una esfera vs. Número de Reynolds

(<http://formu.info/analisis-dimensional.html?page=5>)

Además la gráfica o tabla de valores es también válida para un fluido compresible como el aire si su velocidad es menor que la mitad de la velocidad del sonido en el fluido y también puede obtenerse mediante un modelo. Si, por ejemplo, el prototipo es una esfera lisa de 3m de diámetro sumergida en aire a 20°C con velocidad de  $20 \frac{m}{s}$ , los experimentos para hallar la fuerza de arrastre en esas condiciones serían tremendamente costosos. Sin embargo, el coeficiente de arrastre  $c_\alpha$  puede ser obtenido igualmente con un modelo consistente en una esfera de 0.5m de diámetro sumergida en agua a 20°C con velocidad de  $8 \frac{m}{s}$  en un túnel hidrodinámico pues el número de Reynolds es  $R = 3.97 \times 10^6$  en ambos casos. Se han tomado para el aire los valores:

$$\rho_p = 1.205 \frac{kg}{m^3}$$

$$\eta_p = 1.82 \times 10^{-5} \frac{kg}{ms}$$

y para el agua

$$\rho_m = 998.203 \frac{kg}{m^3}$$

$$\eta_m = 1.0087 \times 10^{-3} \frac{kg}{ms}$$

(El subíndice p significa "prototipo" y el m "modelo"). Con esto resulta que

$$R_p = R_m,$$

y de ahí

$$\frac{v_p d_p}{v_m d_m} = \frac{\rho_m \eta_p}{\rho_p \eta_m} = 1.49$$

Así, aunque se desconozca la forma de la función  $\phi$ , si  $R$  vale lo mismo para el modelo y el prototipo, lo mismo ocurrirá con  $\phi(R)$ . Entonces, como la dependencia (3.6.2) es "universal", el

coeficiente de arrastre será el mismo en el modelo y en el prototipo. Las respectivas fuerzas de arrastre  $F_m$  y  $F_p$  están relacionadas por:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m v_m^2 d_m^2}{\rho_p v_p^2 d_p^2} = 3.68.$$

Ahora, falta por aclarar la forma en que, dado un conjunto de parámetros, pueden hallarse todos los posibles monomios  $\mathcal{PI}$  independientes.



Figura 3.6.2.- En los túneles aerodinámicos se utilizan modelos a escala apropiada para probar la eficiencia aerodinámica de automóviles, aviones, etc. sobre la base del Análisis Dimensional  
 (<https://www.marca.com/2015/08/18/motor/modelos-coches/1439892152.html>)

### 3.7 Cálculo de los monomios $\mathcal{PI}$

Aquí explicaremos cómo hallar los monomios  $\mathcal{PI}$ . En efecto, en los ejemplos precedentes hemos expuesto cuáles son los monomios que pueden formarse, pero no se ha dado un método para calcularlos. En este epígrafe lo esbozaremos, y veremos cómo entronca el primer capítulo en el cuerpo de la teoría.

Supongamos que respecto del sistema de unidades fundamentales  $A_1, A_2, \dots, A_m$  la magnitud dimensionada tiene la dimensión:

$$[a] = [A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_m^{\alpha_m}],$$

y las  $a_j$  de las cuales depende:

$$[a_j] = [A_1^{\alpha_{j1}} A_2^{\alpha_{j2}} \dots A_m^{\alpha_{jm}}]$$

Con  $j = 1, 2, \dots, n$ , sintetizadas en la siguiente "matriz dimensional":

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & \dots & a_n & a \\ A_i: & \alpha_{1i} & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{ni} & \alpha_i, \end{array}$$

y esta matriz nos permite hallar las potencias a las que hay que elevar las magnitudes dimensionales y cómo combinarlas para obtener productos nildimensionados.

Dicho producto tiene la forma  $a_1^{\epsilon_1}, a_2^{\epsilon_2}, \dots, a_n^{\epsilon_n}, a^\epsilon$  y la tarea consiste en hallar los valores  $\epsilon_i$  tales que hacen adimensional dicho producto. Esto quiere decir que las dimensiones  $A_i$  de cada una de las  $a_j$  se deben combinar de modo que se cumpla, para cada  $A_k$ :

$$\epsilon_1 \alpha_{1k} + \epsilon_2 \alpha_{2k} + \dots + \epsilon_n \alpha_{nk} + \epsilon \alpha_k = 0 \quad (3.7.1)$$

y como  $k=1 \dots m$  tendremos un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n+1$  incógnitas, a resolver.

Y es aquí, en el método de hallar los monomios  $\mathcal{PI}$ , donde podemos ver el entronque del Análisis Dimensional con el Álgebra Lineal, particularmente en lo referente al problema de la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

Ahora podemos aclarar bien la utilización de las técnicas del Álgebra Lineal en el Análisis Dimensional, resolviendo algunos de los ejemplos simples anteriores, en los cuales saldrá claro la importancia del conocimiento del fenómeno para el investigador y la sencillez con que se pueden determinar los productos nildimensionados.

### 3.8 Ley de Stokes II

De nuevo para plantear el problema, debemos analizar físicamente las dependencias de la fuerza que se ejerce sobre la esfera en el fluido viscoso en el caso de régimen laminar, que es donde es válida la Ley de Stokes. Como el régimen es laminar la fuerza no depende de  $\rho$  ya que las propiedades inerciales del líquido no se manifiestan. Entonces quedan  $r, \eta$  y  $v$ . La matriz dimensional es:

Tabla 3.8.1

	$F$	$r$	$\eta$	$v$
$\mathcal{L}$	1	1	-1	1
$\mathcal{M}$	1	0	1	0
$\mathcal{T}$	-2	0	-1	-1

Como se ve, las unidades  $A_i$  de que hablamos en el epígrafe anterior son  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{T}$ .

Los números que aparecen en la matriz dimensional son, por columnas, las dimensiones con que aparecen las unidades fundamentales en cada magnitud. O sea:

$$[F]=MLT^{-2}$$

$$[r]=L$$

$$[\eta]=ML^{-1}T^{-1}$$

$$[v]=LT^{-1}$$

Debemos buscar los productos  $F^{\epsilon_1} r^{\epsilon_2} \eta^{\epsilon_3} v^{\epsilon_4}$  tales que sean adimensionales. Esto se traduce en resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4 &= 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_3 &= 0 \\ -2\epsilon_1 - \epsilon_3 - \epsilon_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

se ve que la tabla (3.8.1) es la matriz de los coeficientes del sistema (3.8.2). Como dicha matriz es de rango 3 y hay 4 incógnitas, hay  $4 - 3 = 1$  solución independiente que se puede hallar haciendo

$\epsilon_4 = 1$ . Esto da un solo monomio  $\mathcal{PI}$ :

$$\Pi_1 = \frac{r\eta v}{F}$$

y entonces

$$F = \frac{1}{\Pi_1} r \eta v,$$

que es la Ley de Stokes con  $\Pi_1 = \frac{1}{6\pi}$ .

### 3.9 Caída libre II

Los parámetros son en este caso  $h, g, t$  e incluiremos la magnitud  $v$ , la velocidad del cuerpo al llegar al suelo. La matriz dimensional es:

$$\begin{array}{cccc} & h & g & t & v \\ L & 1 & 1 & 0 & 1 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \quad (3.9.1)$$

La fila correspondiente a  $M$  es nula, lo que significa que en realidad tenemos dos unidades fundamentales que intervienen aquí. Así (3.9.1) se convierte en:

$$\begin{array}{cccc} & h & g & t & v \\ L & 1 & 1 & 0 & 1 \\ T & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 &= 0 \\ -2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 &= 0 \end{aligned}$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2 por lo que habrá dos conjuntos de valores de  $\varepsilon_i$  linealmente independientes. El primero se puede hallar haciendo  $\varepsilon_4 = 1, \varepsilon_3 = 0$  y da que

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \text{ arrojando el resultado}$$

$$\Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}. \quad (3.9.2)$$

Haciendo ahora  $\epsilon_4 = 0, \epsilon_3 = 1$  tenemos  $\epsilon_1 = -\frac{1}{2}$  y  $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$ . Así:

$$\Pi_2 = t \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (3.9.3)$$

Las ecuaciones obtenidas (3.9.2) y (3.9.3) dan la velocidad del cuerpo al caer y el tiempo de caída.

La mecánica arroja como resultado independientemente que  $\Pi_1 = \Pi_2 = \sqrt{2}$ .

### 3.10 Tercera ley de Kepler

Johan Kepler (1572-1630), procesando las observaciones del astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) descubrió que el periodo de revolución de los planetas alrededor del sol, y sus distancias medias al mismo están determinadas por

$$T^2 = kR^3,$$

Siendo  $T$  el período y  $R$  el radio medio de la órbita del planeta;  $k$  es una constante de proporcionalidad igual para todos los planetas.

El Análisis Dimensional puede emplearse para llegar a este resultado. Tomemos como variables relevantes del modelo las siguientes:

$M_s$  - masa del Sol

$M_p$  - masa del planeta

$R$  - radio medio de la órbita

$F$  - fuerza de atracción entre el Sol y el planeta

$T$  - período de revolución.

La matriz dimensional del sistema es entonces:

	$\mathcal{R}$	$\mathcal{M}_s$	$\mathcal{M}_p$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{T}$
$\mathcal{M}$	0	1	1	1	0
$\mathcal{L}$	1	0	0	1	0
$\mathcal{T}$	0	0	0	-2	1

Como se ve, la matriz es singular al tener dos columnas iguales. Sacamos directamente como un monomio adimensional  $\Pi_1 = \frac{M_p}{M_s}$ . Si de la matriz quitamos la columna de  $M_p$ , la solución del sistema de ecuaciones que queda es:

$$\Pi_2 = T^2 R^{-1} M_p^{-1} F.$$

Y por la ley de gravitación universal:

$$F = G \frac{M_s M_p}{R^2},$$

Quedando entonces  $\Pi_2 = T^2 R^{-3} M_s G$ . Las observaciones confirman la constancia de  $\Pi_2$ .

Entonces

$$T^2 = kR^3; \quad k = \frac{\Pi_2}{GM_s}$$

La ley no depende de la masa del planeta. Esto podemos asegurarlo pues tenemos, producto del teorema PI, una relación de tipo  $\Pi_2 = \Phi(\Pi_1)$  donde  $M_p$  entra en  $\Pi_1$ . A primera vista,  $M_p$

entra como una variable en el fenómeno. Sin embargo,  $\Pi_1 = \frac{M_p}{M_s}$  y  $\Pi_2 = T^2 R^{-3} M_s G$  y, en general,

$\Pi_2 = \Phi(\Pi_1)$  con  $M_s$  común en ambos monomios.

Pero cualquier cambio en  $M_p$ , aunque haga variar a  $\Pi_1$ , no afectará para nada a  $\Pi_2$ , que no contiene a  $M_p$ , por lo cual  $M_p$  puede considerarse una variable irrelevante en el problema.

Aunque esta conclusión ha surgido del análisis de un problema particular, es un resultado general: si dada una relación cualquiera  $\Pi_2 = \Phi(\Pi_1)$  un cambio en  $\Pi_1$  producido por una variable perteneciente al mismo pero no a  $\Pi_2$ , dicha variable es irrelevante para  $\Pi_2$

### 3.11 Fuerza de arrastre sobre una esfera II

Aquí la matriz dimensional es

	$\eta$	$\rho$	$d$	$v$	$f$
L	-1	-3	1	1	1
T	-1	0	0	-1	-2
M	1	1	0	0	1

Como siempre, el sistema de ecuaciones correspondiente arroja

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \frac{\rho v d}{\eta} \\ \Pi_2 &= \frac{F \rho}{\eta^2}\end{aligned}\tag{3.10.1}$$

Si en el segundo producto no queremos que figure  $\eta$ , bastará considerar el conjunto también completo de productos nildimensionados dado por:

$$\Pi_1 = \frac{\rho v d}{\eta}, \quad \Pi_1^{-2} \Pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 d^2},\tag{3.10.2}$$

y con (3.10.2) llegamos a la misma solución obtenida anteriormente en la primera solución de este ejemplo, en el epígrafe 5 de este capítulo, así que de nuevo obtenemos (3.6.1).

Como se ve al pasar a (3.10.2), el sistema de ecuaciones puede arrojar un conjunto de monomios  $\mathcal{PI}$  que por transformaciones del tipo (3.10.2) pueden llevarse a otros que pueden ser más ilustrativos, o más cómodos para trabajar o modelar. El paso de un conjunto de productos nildimensionados a otro puede hacerse siempre, teniendo en cuenta que con las soluciones del sistema de ecuaciones correspondiente a cada problema, al determinar las soluciones  $\epsilon_i$  se determina un conjunto de vectores linealmente independientes. Al cambiar los productos nildimensionados lo que se está haciendo es cambiar de base (paso de un conjunto completo de vectores linealmente independientes a otro). Así:

### 3.11.1 Teorema

Cualquier sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo (3.7.1) proporciona los exponentes de un conjunto completo de productos nildimensionados de las variables dimensionales  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Recíprocamente, los exponentes de un conjunto completo de productos nildimensionados de las variables  $a_1, a_2, \dots, a_n$  forman un sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones (3.7.1).

Aclaremos que un conjunto de monomios  $\mathcal{PI}$  es completo si cada uno es independiente de los demás del conjunto y cualquier otro puede expresarse como producto de potencias de los monomios  $\mathcal{PI}$  del conjunto dado.

Aclaremos que un conjunto de monomios  $\mathcal{PI}$  es completo si cada uno es independiente de los demás del conjunto y cualquier otro puede expresarse como producto de potencias de los monomios  $\mathcal{PI}$  del conjunto dado.

### 3.12 Una aplicación: el teorema de Pitágoras

Por último, veremos otra aplicación: el Análisis Dimensional nos permite obtener el teorema de Pitágoras. El área de un triángulo rectángulo viene dada por la hipotenusa y, digamos, por el menor de sus ángulos. El área debe venir expresada dimensionalmente por el cuadrado de una longitud y una función del ángulo

$$s = u^2 f(\varphi)$$

Si hacemos la construcción auxiliar mostrada en la próxima figura, es decir, trazamos desde el ángulo recto del triángulo original una perpendicular hacia la hipotenusa, vemos que cada lado

del triángulo cumple la condición impuesta: el área de cada triángulo rectángulo formado por esa construcción auxiliar viene dada por la hipotenusa correspondiente y por el seno de sus ángulos

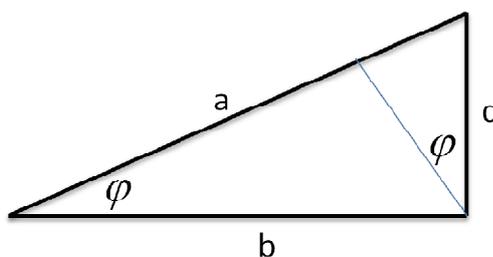


Figura 3.11.1. Triángulo rectángulo con la construcción auxiliar de una perpendicular trazada desde el ángulo recto a la hipotenusa

$$S = a^2 f(\varphi)$$

$$S_1 = b^2 f(\varphi)$$

$$S_2 = c^2 f(\varphi)$$

Entonces  $S = S_1 + S_2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Y queda demostrado el teorema de Pitágoras.

## **Capítulo 4. Más sobre los principios del Análisis Dimensional**

*Aquí abundaremos en algunos aspectos del Análisis Dimensional que facilitan el empleo de sus métodos de forma más efectiva. Recalcaremos en algunos aspectos importantes para el trabajo con dimensiones y modelación.*

### **4.1 Dimensiones y vectores**

*Por definición, un vector es un ente tal que, dado un sistema de coordenadas, los componentes de dicho vector en ese sistema,  $x_1, x_2, x_3$  cambian ante un cambio de ejes mediante las relaciones lineales*

$$x_j = \omega_{1j}x_1 + \omega_{2j}x_2 + \omega_{3j}x_3$$

*Puede generalizarse esta definición a un espacio de  $m$  dimensiones. Entonces puede verse que los exponentes dimensionales  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  de la magnitud  $a$  con relación a la base  $(A_1, \dots, A_m)$  corresponden a las componentes dimensionales, hacen las veces de componentes de la dimensión considerada como vector y varían al cambiar la base.*

### **4.2 Bases dimensionales**

*Ya vimos que, cuando se toman en consideración todas las magnitudes que intervienen en una teoría, la multiplicidad de la base queda determinada por el sistema de ecuaciones fundamentales. Pero a menudo, en determinado orden de fenómenos, no entran todas las magnitudes de la teoría y la referida base puede ser excesiva. Ya vimos que las magnitudes  $a_i$  pueden representarse:*

$[a_i] = A_1^{\alpha_{i1}} \dots A_m^{\alpha_{im}} \quad ; \quad i = 1 \dots n$  . Se trata de saber si la base es excesiva (también llamada superabundante) y, en caso afirmativo, saber cómo ha de ser la base estricta.

Traducido este problema al lenguaje vectorial se enuncia así:

"Dados varios vectores, cuyas componentes con relación a determinada base  $m$ -dimensional  $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1m}), \dots, (\alpha_{n1}, \dots, \alpha_{nm})$ , averiguar si es posible utilizar para su representación una base menor y la manera de obtenerla. "

La respuesta es:

El número de vectores (o magnitudes) que son necesarios para formar una base estricta es igual al rango  $h$ , de la matriz formada con las componentes (o con los exponentes dimensionales) en otra base cualquiera.

Como vectores (o magnitudes) de la nueva base pueden tomarse  $h$  cualesquiera entre los vectores dados, siempre que sean linealmente independientes, o sea, que

$\omega_1 a_1 + \dots + \omega_n a_n = 0$  admita solamente la solución trivial  $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = 0$  , lo que equivale a decir que la característica de la matriz formada por sus exponentes dimensionales ha de valer  $h$ .

De aquí se deduce que:

Para formar una base estricta, se forma la matriz de los exponentes dimensionales con relación a otra base cualquiera:

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{matrix},$$

y se seleccionan los menores no nulos de mayor rango. A cada uno de ellos corresponde una base estricta formada por las magnitudes cuyos exponentes dimensionales figuran en él. Veamos el siguiente ejemplo:

#### 4.2.1 Rotación de un sólido rígido

Sea un sólido rígido de momento de inercia  $\mathbf{I}$  respecto a un eje, sometido a un par elástico  $\mathbf{K}$  con amortiguamiento proporcional a la velocidad angular. Las magnitudes que intervienen son el ángulo  $\theta$ , el momento de inercia  $\mathbf{I}$ , el período de la oscilación  $T$ , el par  $\mathbf{K}$  y el coeficiente de rozamiento  $\tau$ .

La matriz de los exponentes dimensionales es:

	$\theta$	$\mathbf{I}$	$T$	$\tau$	$\mathbf{K}$
$\mathcal{L}$	0	2	0	2	2
$\mathcal{M}$	0	1	0	1	1
$\mathcal{T}$	0	0	1	1	-2

En ella son nulos todos los menores de tercer orden, es decir, la matriz dimensional es de rango 2, por lo cual las bases estrictas constarán de dos magnitudes. Las magnitudes  $\mathbf{I}, t, \tau, \mathbf{K}$  son

dimensionales independientes dos a dos, por lo que con una pareja cualquiera, puede formarse una base estricta. Con la pareja  $\mathbf{I}, \tau$ , por ejemplo, las fórmulas dimensionales son:

$$[\theta] = [\mathbf{I}]^0 [\tau]^0$$

$$[t] = [\mathbf{I}] [\tau]^{-1}$$

$$[K] = [\mathbf{I}]^{-1} [\tau]^2$$

En este ejemplo, la base  $(L, M, T)$  es excesiva.

Las bases también pueden mutilarse, como ya vimos en el capítulo 2, con la supresión de algunas constantes fundamentales, lo cual altera todo el sistema dimensional. Es como si en un espacio vectorial sólo se considerase de cada vector su proyección sobre el subespacio que resulta de eliminar una dimensión. Al mutilarse la base, puede suceder que dos magnitudes que tenían distinta dimensión en la base completa, aparezcan como de igual dimensión en la mutilada pues puede ser que los correspondientes vectores tengan igual proyección en el subespacio restante. Por ejemplo, ya vimos cómo hacer  $\gamma = 1$  en la ley de gravitación universal lo que provoca que la unidad de masa no sea independiente de  $L$  y  $T$ . En esta base, la fuerza tiene dimensiones:

$[F] = L^4 T^{-4}$ . Las mismas fórmulas dimensionales se hubieran obtenido si, en lugar de hacer  $\gamma = 1$  se hubiera impuesto a dicha constante un valor numérico adimensional cualquiera.

Puede señalarse que, en general, no hay inconveniente en utilizar bases superabundantes como se hizo patente en el epígrafe 8 del Capítulo 3, pero en bases defectuosas se logrará, en general, menos información que con bases completas.

### **4.3 Magnitudes relativas**

Todo cuanto afecte la integridad de las fórmulas dimensionales puede poner en peligro la efectividad del Análisis Dimensional. Al ser las fórmulas dimensionales relaciones entre las razones de unidades de dos sistemas, quedarán mutiladas cuando, de un modo u otro, se fije de antemano la unidad de alguna magnitud exigiendo que permanezca invariable al cambiar de unidades. Con ello se aniquila la dimensión de la magnitud en cuestión y se alteran las dimensiones de las restantes. Por esto conviene suprimir las llamadas "magnitudes relativas" tales como la densidad con relación al agua, la relación entre las velocidades de propagación de la luz en dos medios diferentes, la constante dieléctrica con relación al aire (o al vacío) etc.

Entre las magnitudes relativas figuran los así llamados pesos atómicos y pesos moleculares, los que por ser magnitudes relativas son números fijos. De ahí que un error frecuente es tomar el número de moles como una magnitud sin dimensiones. Afortunadamente en ninguna ecuación física intervienen las masas moleculares relativas, sino el número de moles, que tiene la misma dimensión que la masa.

### **4.4 Algunas ecuaciones contradictorias**

En muchas ecuaciones en que intervienen logaritmos parece que no se cumple el principio de homogeneidad pues figuran como argumentos magnitudes dimensionales. Así, en la expresión de la entropía de los gases ideales

$$S = c_p \ln \theta - R \ln P + cte ,$$

intervienen la temperatura absoluta  $\theta$  y la presión  $P$  como argumentos del logaritmo. Sin embargo, la fórmula es correcta gracias a la presencia de la constante arbitraria, que indica que queda indeterminado el origen de entropía y, por tanto, la ecuación sólo puede servir para calcular diferencias. Para poner este hecho de manifiesto, es preferible escribir:

$$S - S_o = c_p \ln \frac{\theta}{\theta_o} - R \ln \frac{P}{P_o}$$

En general al aplicar el Análisis Dimensional, es necesario revisar bien el arsenal de ecuaciones de que se dispone que estén relacionadas con el fenómeno en estudio, y evitar trabajar con relaciones que son solo válidas para sistemas de unidades fijas.

#### 4.5 Información que brinda el Análisis Dimensional

Ya sabemos, por el teorema  $\mathcal{P}I$ , que una ley física dimensionalmente homogénea se puede expresar con el sistema completo de productos nildimensionados correspondientes en la forma:

$$f(\pi_1, \dots, \pi_n) = a$$

Este conjunto completo de monomios  $\mathcal{P}I$  ya vimos que se puede hallar resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \epsilon_i = 0 \quad (4.5.1)$$

Observe el lector que (4.5.1) expresa lo mismo que (3.7.1) en forma sintetizada. Y si  $h$  es el rango de la matriz de los exponentes dimensionales, entonces habrá  $n - h$  incógnitas con valores arbitrarios. Estas incógnitas arbitrarias pueden ser cualesquiera, con tal de que en la matriz formada con las columnas en que figuran las  $h$  magnitudes restantes haya algún menor de orden  $h$  distinto de cero. Si, por ejemplo, hay alguno de estos menores en las  $h$  últimas columnas, a cada sistema de valores

$$\begin{array}{cccc}
 \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_{n-h} \\
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{array} ,$$

corresponderá una solución, y entre todas formarán un sistema completo de monomios  $\mathcal{PI}$ .

El problema se simplifica si se empieza a agrupar las magnitudes que tengan la misma dimensión.

Dividiendo las de cada grupo por una de ellas, se obtienen los llamados "factores de forma" ( $\omega$ ).

Estos factores de forma pueden ser las relaciones entre las longitudes, las masas, las fuerzas, etc.,

que intervengan en el fenómeno y entre ellos se incluyen, desde luego, los ángulos. Hecho esto, se

hallan los monomios  $\mathcal{PI}$  tomando en consideración tan solo una de las magnitudes de cada grupo,

y a los monomios así obtenidos se agregan los factores de forma.

Una vez más señalaremos que la función  $\mathcal{PI}$  es una función universal que en la mayoría de los

casos en la práctica es desconocida.

Como sabemos, siempre puede lograrse que aquella magnitud (sea  $a_1$ ) que interesa expresar en función de las otras, figure solo en uno de los monomios (sea  $\pi_1$ ). Entonces, la ecuación puede tomar la forma explícita:

$$a_1 = a_2^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_n} \psi(\pi_2, \dots, \pi_i)$$

La información más completa se logra cuando  $i=1$ , o sea cuando el sistema completo de productos nildimensionados, incluyendo los factores de forma, consta de un solo miembro, pues puede afirmarse que dicho monomio ha de ser igual a un número fijo, que no depende de las unidades de medida.

El averiguar la forma de una función universal  $\psi$ , cuando no se reduce a un número fijo, cae fuera del Análisis Dimensional, pero en muchas ocasiones bastan consideraciones sencillas basadas en el conocimiento del fenómeno en cuestión para reducir el número de variables que figuran en la misma, y hasta para determinar enteramente su forma, salvo un factor numérico.

Los ejemplos resueltos anteriormente son un aval de esta afirmación.

Un caso de gran interés es aquel en que la función indeterminada solo contiene factores de forma

$$a_1 = a_2^{\epsilon_2} \dots a_n^{\epsilon_n} \psi(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r)$$

Ya sabemos que si se aplica esta ecuación a dos sistemas **semejantes**, esto es, tales que los factores de forma de uno sean iguales a los del otro, la función universal  $\psi$  tendrá valores iguales en ambos y bastará averiguar su valor en uno de ellos midiendo las magnitudes  $a_1, \dots, a_n$  en un caso particular. En esto consiste el principio de semejanza, que es el fundamento de los ensayos con modelo reducido, de tanta importancia en la construcción de aviones, barcos, obras hidráulicas y

edificios. La semejanza entre el sistema de tamaño natural y el modelo se refiere a todos los factores de forma: no sólo a los geométricos, sino también a los de índole de física. Los ejemplos citados en el Capítulo 3: Movimiento de un líquido en tubos y Arrastre sobre una esfera son ilustrativos de esto. No obstante, con vistas a aclarar bien este importantísimo aspecto, veamos otro ejemplo.

#### 4.6 Péndulo simple II

En el movimiento oscilatorio del péndulo simple solo interviene el peso del cuerpo  $W = mg$ .

Designemos por  $T$  el periodo y  $l$  la longitud del péndulo. El ángulo inicial  $\psi_0$  (amplitud de la oscilación) es un factor de forma. La matriz dimensional será:

	$T$	$l$	$m$	$W$
$\mathcal{L}$	0	1	0	1
$\mathcal{M}$	0	0	1	1
$\mathcal{T}$	1	0	0	-2

Como el rango de la matriz es  $h = 3$ , habrá un solo monomio  $\mathcal{PI}$ , aparte del factor de forma.

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_4 = 0$$

Haciendo  $\varepsilon_1 = 1$ :

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_4 = 0$$

$$\varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0$$

$$1 - 2\varepsilon_4 = 0$$

y resulta:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2}$$

Entonces

$$\pi_1 = T \sqrt{\frac{w}{ml}} = T \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Los dos factores adimensionales son este y el factor de forma, por lo que la función universal se expresa:

$$\pi_1 = f(\psi_o),$$

o sea,

$$T = \sqrt{\frac{g}{L}} f(\psi_o) \quad (4.6.1)$$

y puede afirmarse que en  $f(\psi_o)$  no puede figurar, aparte de  $\alpha$ , más que números fijos. El resto del Análisis puede ser idéntico (compare (4.6.1) y (3.2.1) al realizado en el capítulo anterior para el mismo ejemplo.

#### 4.7 Tres reglas importantes

El principal problema del Análisis Dimensional consiste en hacer la lista de magnitudes que intervienen en un fenómeno. Aunque no hay recetas para esto, y el factor determinante lo

constituye el conocimiento que el investigador posee del fenómeno en cuestión, citaremos algunas reglas que pueden ayudar.

a) *El fenómeno debe caer en el dominio de alguna de las teorías físicas establecidas.*

*Esto es evidente. De no cumplirse esto pueden obtenerse como resultados verdaderos disparates.*

*Por ejemplo, planteamos el siguiente problema. ¿Cuánto tiempo debe entrenar un saltador de altura, de masa  $m$ , para vencer una altura  $h$ ? Como quiera que la aceleración de la gravedad  $g$  interviene en el problema las magnitudes son las mismas que el caso de la caída libre y la solución es:*

$t \sim \sqrt{\frac{h}{g}}$  *resultado completamente absurdo.*

b) *Excepto la magnitud incógnita, todas las que figuren en la lista deben ser constantes o variables independientes. Entre las magnitudes en consideración sólo debe existir una ecuación. Como comentario a esta regla podemos remitirnos al problema del flujo de un líquido por una tubería: pudiera pensarse que en el problema debe intervenir la temperatura, pues la viscosidad varía fuertemente con la misma, influyendo en el estado de movimiento del líquido. En los flujos de combustible este factor siempre se toma en cuenta. Sin embargo, esto sería incorrecto, ya que precisamente existe una ecuación independiente que liga la viscosidad con la temperatura. Por eso la inclusión de la viscosidad en el problema excluye a la temperatura.*

c) *Deben tomarse tales constantes, tanto características como universales, cuya presencia esté prevista por la teoría del fenómeno considerado.*

*Esto también es evidente. Supóngase que en el problema del péndulo se omite la aceleración de la gravedad o que en un problema de elasticidad se omite alguna de las constantes elásticas del material. Como las más difíciles de trabajar son las constantes universales, siendo difícil discernir entre las necesarias y las superfluas, pueden recomendarse que para esto se siga la segunda regla. Así, puede recomendarse, en forma más concreta, guiarse por la siguiente correspondencia:*

*c1) En Mecánica Newtoniana: la constante de gravitación, que solo figura cuando se toman en consideración las acciones gravitatorias.*

*c2) En los problemas de Mecánica Relativista interviene la velocidad de la luz.*

*c3) En Mecánica Estadística, la constante de Boltzmann  $k_B$  y la de Planck  $h$ .*

*c4) En Mecánica Cuántica, la constante de Planck,  $h$ .*

*c5) En Electrodinámica, las constantes  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ .*

*Estas reglas en definitiva nos aclaran que el factor decisivo para plantear correctamente un problema de Análisis Dimensional estriba en el conocimiento por parte del investigador de la física del problema y la penetración que sea capaz de realizar en lo esencial que se manifiesta a través del fenómeno en estudio, pues solo con el conocimiento de los fundamentos de las teorías físicas es posible decidir qué magnitudes han de intervenir como variables independientes y qué constantes universales hay que tomar en consideración. Como de los errores también se aprende, dedicaremos el próximo epígrafe a ilustrar de qué manera el incumplimiento de estas reglas disminuye la efectividad del método del Análisis Dimensional.*

#### 4.8 Relaciones espurias

Tomemos algunos de los ejemplos ya resueltos y hagamos un planteamiento incorrecto de los mismos. Comencemos con el problema de la fuerza sobre una esfera en un líquido viscoso en régimen laminar con densidad  $\rho$  y velocidad  $v$ .

##### 4.8.1 Ley de Stokes

Si suponemos que en el problema, a diferencia de como habíamos visto antes, influyen la masa del cuerpo  $m$  y la densidad del fluido  $\rho$ , tenemos la siguiente matriz dimensional.

	$F$	$m$	$r$	$\eta$	$\rho$	$v$
$\mathcal{L}$	1	0	1	-1	-3	1
$\mathcal{M}$	1	1	0	1	1	0
$\mathcal{T}$	-2	0	0	-1	0	-1

El rango de la misma es  $h = 3$ , por lo que habrá ahora 3 monomios  $\mathcal{PI}$  independientes. Son:

$$\pi_1 = \frac{\eta^2 r^3}{Fm}$$

$$\pi_2 = \frac{r^3 \rho}{m}$$

$$\pi_3 = \frac{mv^2}{Fr}$$

Con  $\pi_1$  o con  $\pi_3$  pudiera obtenerse dependencia de  $F$  con  $m$ , lo cual no es cierto. Estas pueden expresarse:

$$F \sim \frac{\eta^2 r^3}{m}$$

$$F \sim \frac{mv^2}{r},$$

que son a todas luces relaciones espurias resultantes de haber introducido factores ajenos al problema. Puede generarse un monomio PI nuevo multiplicando  $\pi_1$  y  $\pi_3$

$$\pi_4 = \pi_1 \pi_3 = \frac{\eta^2 r^2 v^2}{F^2},$$

y entonces

$$F \sim r\eta v,$$

que es, salvo la constante de proporcionalidad, la ya tan llevada y traída **Ley de Stokes**. Si tomamos:

$$\pi_5 = \pi_1^{1/2} \pi_3^{-1/2} = \frac{\eta r^2}{mv},$$

y seleccionamos como conjunto de productos nildimensionados independientes a  $\pi_4, \pi_5$  y  $\pi_2$ ,

tenemos:

$$F = cr\eta v \phi \left[ \frac{r^3 \rho}{m}, \frac{\eta r^2}{mv} \right], \text{ lo cual no es correcto a menos que sea } \phi = \text{constante, pero ya esta}$$

respuesta cae fuera de los límites del Análisis Dimensional. En  $\pi_5$  hay, en definitiva, dependencias espurias, al menos en principio, y esto es resultado de la introducción de variables espurias.

#### 4.8.2 Caída libre (y péndulo simple)

Analicemos la caída Libre introduciendo la masa del cuerpo. Si continuamos planteándonos el problema de hallar el tiempo de caída y la velocidad al caer, la matriz dimensional es:

	$h$	$m$	$g$	$t$	$v$
$\mathcal{L}$	1	0	1	0	1
$\mathcal{M}$	0	1	0	0	0
$\mathcal{T}$	0	0	-2	1	-1

Aquí, a diferencia de lo visto en el Capítulo anterior, la base  $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{T})$  no es excesiva. Esto se debe a que se introdujo la masa del cuerpo. El rango de la matriz en este caso es  $h = 3$  y hay dos monomios  $\mathcal{PI}$  independientes. De nuevo se ven que son:

$$\pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

$$\pi_2 = t\sqrt{\frac{g}{h}}$$

y la masa no interviene en el problema. Afortunadamente, aquí al ser la base planteada una base estricta, la inclusión de una variable espuria es asimilada por la nueva dimensión que se introduce. De aquí se ve que introducir variables espurias tiene un efecto análogo a trabajar con una base deficiente.

En efecto, una base deficiente introduce relaciones espurias. Para ver esto hagamos  $\gamma = 1$  en la ley de Gravitación Universal. Entonces la masa deja de ser una dimensión independiente, quedando

solo  $L$  y  $T$ . Si en estas condiciones planteamos el problema del péndulo simple, la matriz dimensional queda:

	$t$	$L$	$m$	$W$
$l$	1	1	3	4
$T$	0	0	-2	-4,

y aparte del factor de forma  $\tilde{\omega} = \alpha$ , resultan dos monomios  $\mathcal{P}I$ :

$$\pi_1 = g^{3/4} m^{-1/4} T; \quad \pi_2 = l \sqrt{\frac{g}{m}},$$

podemos librarnos de  $\pi_1$  con la transformación

$\pi_1' = \pi_1 \pi_2^{-1/2} = T \sqrt{\frac{g}{l}}$  y tenemos que la dependencia  $\pi_1' = \phi(\pi_2, \alpha)$  se expresa como:

$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \phi \left[ l \sqrt{\frac{g}{m}}, \alpha \right]$ , que es falsa al afirmar la influencia de la masa sobre el periodo y además es

menos precisa porque la función desconocida depende de dos parámetros en vez de uno.

Con lo visto hasta ahora podemos concluir que si ocurre que al ampliar de algún modo una base disminuye el número de monomios  $\mathcal{P}I$  independientes, se puede afirmar que la base primitiva era deficiente, mientras que si se obtiene siempre el mismo sistema de monomios, la base primitiva es completa, y la ampliada es superabundante.

#### 4.9 Influencia de las constantes universales

*Aunque ya en varias ocasiones hemos señalado el papel que desempeñan las constantes universales en la teoría y algo sobre las formas de considerarlas en los problemas, vale la pena en este momento dedicarle un aparte a factor tan importante.*

*Distinguiendo entre la masa inercial y la gravitatoria, las ecuaciones fundamentales de la Mecánica Newtoniana podrían ser:*

$$f = m_i a \quad ; \quad f = \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2}, \quad (4.9.1)$$

*y con ellas se hubiera elaborado el sistema de magnitudes mecánicas en el que no habría ninguna constante universal. Al resolver el problema en que interviniesen fuerzas gravitatorias se tomarían en consideración, además de las magnitudes que determinan la posición de los cuerpos, las masas gravitatorias y las inerciales. La introducción de la constante de gravitación introduce la ley de proporcionalidad:*

*$m_g = \sqrt{\gamma} m_i$  y las ecuaciones (4.9.1) devienen:*

$$f = ma \quad ; \quad f = \gamma \frac{mm'}{r^2},$$

*y se trabaja siempre con la masa inercial. La supresión de la masa gravitatoria simplifica grandemente los problemas.*

*Esto es aplicable a las demás constantes universales. Ya sabemos que solo son indispensables las que figuran como factores de proporcionalidad entre las magnitudes física inseparables relacionadas por ecuaciones del tipo  $x_1 = cx_2$ . Un ejemplo de esta relación es la conocida ley  $E = mc^2$ . Este tipo de relación podrá servir, como en el caso de la ley de gravitación, para eliminar*

de la física una de las magnitudes con la simplificación consiguiente de todos aquellos problemas en que estuviese contemplada su intervención, pero a condición de agregar la constante universal, con sus dimensiones características, a la lista de magnitudes. Claramente, **la eliminación de una de las magnitudes físicas inseparables es posible siempre a condición de introducir la correspondiente constante universal.**

Nunca podremos insistir demasiado en el importante papel que desempeñan las constantes universales en toda la Física, y en particular en el Análisis Dimensional.

En cada teoría entran de forma natural constantes universales y, lógicamente, el número de dichas constantes dimensionalmente independientes no puede exceder la multiplicidad de la base que forman las dimensiones involucradas en la teoría. Podemos considerar las constantes universales como vectores en un espacio vectorial con dimensión igual a la multiplicidad de la base. Como veremos, en una teoría mecánica basta con tres dimensiones dadas las dimensiones que ahí se usan, corrientemente ( $M$ ,  $L$ ,  $T$ ). En electromagnetismo puede añadirse otra constante universal, digamos la carga del electrón  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$  y en termodinámica se puede agregar la constante de Boltzmann  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ .

Siempre puede formarse una base exclusivamente con constantes universales, por lo cual cualquier otra será función monomio de las que se toman para la base.

Como ejemplo, podemos ver que en Mecánica Cuántica son suficientes las magnitudes  $c$  (velocidad de la luz en el vacío),  $m$  (masa de la partícula, digamos del electrón) y  $h$  (constante de Planck). La matriz dimensional que forman estas constantes es:

$$\begin{array}{r} m \quad c \quad h \\ M \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ L \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ T \quad 0 \quad -1 \quad -1 \end{array} \quad ,$$

cuyo determinante es no nulo, lo que demuestra que las constantes son dimensionalmente independientes. Cualquier monomio de estas constantes será una constante universal de naturaleza mecánica. Por ejemplo, si calculamos una longitud o un tiempo en que intervengan sólo partículas de masa  $m$ , el Análisis Dimensional da:

$$\begin{cases} l_0 = \Pi_1 \frac{h}{mc} \\ t_0 = \Pi_2 \frac{h}{mc^2} \end{cases} \quad (4.9.2)$$

$\Pi_1, \Pi_2$  son números cualesquiera pero si hubiere alguna razón para que su valor sea mayor que 1,

resultaría que en el problema considerado no puede haber longitudes menores que  $\frac{h}{mc}$  -

correspondiente a la longitud de onda de Compton de la partícula- ni tiempos menores que  $\frac{h}{mc^2}$

- tiempo que se desprende de la relación de incertidumbre- ¿Acaso estamos en este caso frente a un problema con cuanto espacial y temporal?

Esta problemática no es nueva. La admisión de intervalos espaciales y temporales mínimos hace mucho se discute en Física y no parece ser un caso cerrado. Pero lo importante es que esta

discusión surge aquí, aunque sea como hipótesis o inquietud, únicamente a partir de la

consideración del papel de las constantes universales y el empleo del Análisis Dimensional.

Si añadimos, como decíamos antes, la carga de electrón para considerar problemas

electromagnéticos, no es difícil ver que salen las conocidas constantes universales:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \Pi_3 \frac{e^2}{hc} \\ \mu_0 = \Pi_4 \frac{h}{e^2 c} \end{cases},$$

que coinciden, dando valores numéricos apropiados a  $\Pi_3$  y  $\Pi_4$ , con las permeabilidades eléctrica y magnética del vacío. Si  $\Pi_3 = 2\pi$ , obtenemos la constante de estructura fina  $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}$ .

#### 4.10 Discriminación de las dimensiones espaciales

Una vez que se está familiarizado con los métodos del Análisis Dimensional, resulta asombroso apreciar las posibilidades y ventajas del método de discriminación de las dimensiones espaciales (Huntley, 1952) que consiste en considerar separadamente las tres dimensiones del espacio  $L_x, L_y, L_z$  aumentando la multiplicidad de la base. No introduciremos aquí la justificación teórica de este método sino que nos limitaremos a señalar la forma de aplicarlo. Para profundizar en la justificación teórica puede consultarse la referencia No.3.

Con las tres dimensiones espaciales, la masa y el tiempo se forma una base de 5 magnitudes.

Por ejemplo las fórmulas dimensionales:

$$[f_x] = L_x MT^2; \quad [f_y] = L_y MT^2; \quad [f_z] = L_z MT^2,$$

significan que, si en el eje  $x$  se cambia el centímetro por el metro y se conserva el centímetro en los otros dos ejes, la unidad de fuerza coherente con la ecuación  $f = ma$  seguirá siendo la **dina** en los ejes  $Y$  y  $Z$  pero valdrá 100 **dinas** en el eje  $X$ . Esta discriminación hace aumentar el número de ecuaciones en los problemas del Análisis Dimensional, con lo que disminuye el número de monomios  $\mathcal{P}I$  independientes y la solución gana en precisión.

*Pasemos ahora a ver algunos ejemplos.*

#### **4.10.1 Volumen de un paralelepípedo**

*Como es conocido, es proporcional a cada una de sus dimensiones espaciales, por lo que su fórmula dimensional es*

$$[V] = L_x L_y L_z$$

*Así, si se quiere conocer el volumen de un paralelepípedo de aristas  $a, b, c$  tenemos como matriz dimensional:*

	$V$	$a$	$b$	$c$
$L_x$	1	1	0	0
$L_y$	1	0	1	0
$L_z$	1	0	0	1

*Hay un solo producto nildimensionado  $\pi_1 = \frac{V}{abc}$ . Hay 3 factores de forma que son los ángulos,*

*por lo que*

$$V = abc \psi(\theta_1, \theta_2, \theta_3).$$

*Si el paralelepípedo es rectangular,  $\psi$  es un número, al cual se le puede atribuir el valor 1, dando*

$$V = abc.$$

Por la vía tradicional, si no se hubiesen discriminado las dimensiones espaciales puede comprobarse que el resultado hubiera sido del tipo:

$$V = a^3 \psi\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right),$$

que suministra menos información.

#### 4.10.2 Alcance de un proyectil

Supongamos que queremos hallar el alcance de un proyectil de masa  $m$  que se lanza en dirección horizontal desde una altura  $h$  con velocidad horizontal  $v$ . Por la vía tradicional podemos resolver el problema como sigue:

Por cuanto el alcance viene determinado por el tiempo de caída y este no depende de la masa del cuerpo, la masa deja de ser un parámetro del problema. Así

$$X = f(v, h, g) \quad (4.10.2.1)$$

En (4.10.2.1) ninguna de las magnitudes tiene dimensiones de masa por lo que la base es  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{T}$ . La base  $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$  sería superabundante. Esto puede comprobarse añadiendo simplemente  $\mathcal{M}$  y viendo que no juega ningún papel.

Puede también definirse un factor de forma  $\tilde{\omega}_1 = \frac{x}{h}$ . Entonces ya podemos escribir la matriz dimensional:

	$h$	$v$	$g$
$\mathcal{L}$	1	1	1
$\mathcal{T}$	0	-1	-2,

hay solo un monomio  $\mathcal{PI}$ :

$$\pi_1 = \frac{hg}{v^2},$$

y la solución del problema por el método tradicional es  $x = h\psi\left(\frac{hg}{v^2}\right)$  y queda determinada la

función  $\psi$ .

En cambio, discriminando las componentes según el eje horizontal  $X$  y el vertical,  $Z$ , no hay

factor de forma y la matriz dimensional es:

	$x$	$v$	$g$	$h$
$L_x$	1	1	0	0
$L_y$	0	0	1	1
$L_z$	0	-1	-2	0

Esto da un solo monomio  $\mathcal{PI}$ ; por lo tanto, la solución es  $x = cv\sqrt{\frac{h}{g}}$ . El cálculo completo da

$$c = \sqrt{2}$$

Supongamos el caso  $h = 0$ , en cambio la velocidad inicial forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

Por el cálculo tradicional el factor de forma es  $\alpha$  y la matriz dimensional es:

	$x$	$v$	$g$
$\mathcal{L}$	1	1	1
$\mathcal{T}$	0	-1	-2,

y hay un único monomio  $\mathcal{PI}$ :

$$\pi_1 = \frac{xg}{v^2},$$

siendo la solución:

$$x = \frac{v^2}{g} \psi(\alpha)$$

Discriminando las componentes espaciales, el problema se plantea y resuelve como sigue:

	$x$	$v_x$	$v_y$	$g$
$L_x$	1	1	0	0
$L_y$	0	0	1	1
$\mathcal{T}$	0	-1	-1	-2

El rango de la matriz es  $h = 3$ , dando entonces un solo monomio PI:

$$\pi_1 = \frac{v_x v_y}{x g},$$

entonces

$$x = c \frac{v_x v_y}{g},$$

o bien, como  $v_x = v \cos(\alpha)$   $v_y = v \sin(\alpha)$

$$x = c \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} \quad . \quad \text{En la solución completa } c = 2 .$$

Este método, por supuesto, muestra sus ventajas cuando se puede discriminar diferentes direcciones en el espacio, no así cuando, como ocurre en muchas ocasiones, hay isotropía completa.



## Capítulo 5 Problemas complementarios

*En este capítulo, ilustraremos la aplicación del Análisis Dimensional a problemas de una complejidad considerablemente superior a la mayoría de los expuestos en los capítulos anteriores. Aparte de la complicación física y matemática que presentan dichos problemas, analizaremos el aspecto ingenieril (o más bien experimental) de los mismos, lo cual presenta gran interés ya que el Análisis Dimensional es la "teoría del experimento".*

*Aunque el Análisis Dimensional es aplicable y ofrece resultados muy interesantes en la teoría de la elasticidad, dando respuestas útiles y precisas sobre problemas de resistencia de materiales, solidez de construcciones, etc., limitaremos los ejemplos en este capítulo a problemas más vinculados con la mecánica de fluidos.*

### 5.1 Problemas

#### 5.1.1 Circulación turbulenta de un fluido en una tubería

*Si se estudia este problema desde el punto de vista de las ecuaciones de la mecánica de fluidos, se concluye que es imposible resolverlo explícitamente. Por ello se recurre al Análisis Dimensional para encontrar soluciones imposibles de hallar por otras vías.*

*Sea un tubo de longitud  $L$  y radio  $r$  en cuyos extremos hay una diferencia de presión  $\Delta p$ . El fluido tiene densidad  $\rho$  y viscosidad  $\eta$ .*

*Podemos definir aquí un factor de forma,  $\tilde{\omega} = \frac{L}{r}$ .*

*La aplicación del Análisis Dimensional da los productos nildimensionados, (prescindiendo del factor de forma):*

$$\Pi_1 = \frac{\rho \bar{v}^2 L}{r \Delta p} \quad (5.1.1.1)$$

$$\Pi_2 = \frac{\bar{v} r}{\eta} \rho = R \quad (5.1.1.2)$$

*aquí  $\bar{v}$  es la velocidad media en toda la sección de la tubería*

*Con (5.1.1.1) y (5.1.1.2) podemos ver que el gradiente de presión en el tubo es:*

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\rho \bar{v}^2}{r} \psi \left( \frac{\rho \bar{v} r}{\eta} \right) = \frac{\rho \bar{v}^2}{r} \psi(R), \quad (5.1.1.3)$$

*donde  $R$  es el número de Reynolds. El gradiente de Presión es, en estas condiciones, función del número de Reynolds, siendo necesario hallar la función  $\psi(R)$  por vía experimental. El conocimiento de (5.1.1.3) permite modelar el fenómeno de flujo turbulento en un prototipo a través de un sistema modelo en que ésta es una dependencia universal.*

*Ejemplo. Para el agua, dado un  $R$ ,  $\psi$  es el mismo que para el petróleo con igual  $R$ ,*

*Por lo tanto puede modelarse un flujo de petróleo en una instalación industrial mediante un flujo de agua en un montaje de laboratorio. Esta es la base de la modelación.*

*La figura 5.1.1 ilustra el resultado de experimentos realizados con diferentes fluidos mostrando la función en función del número de Reynolds. Llama la atención la característica universal de este comportamiento.*

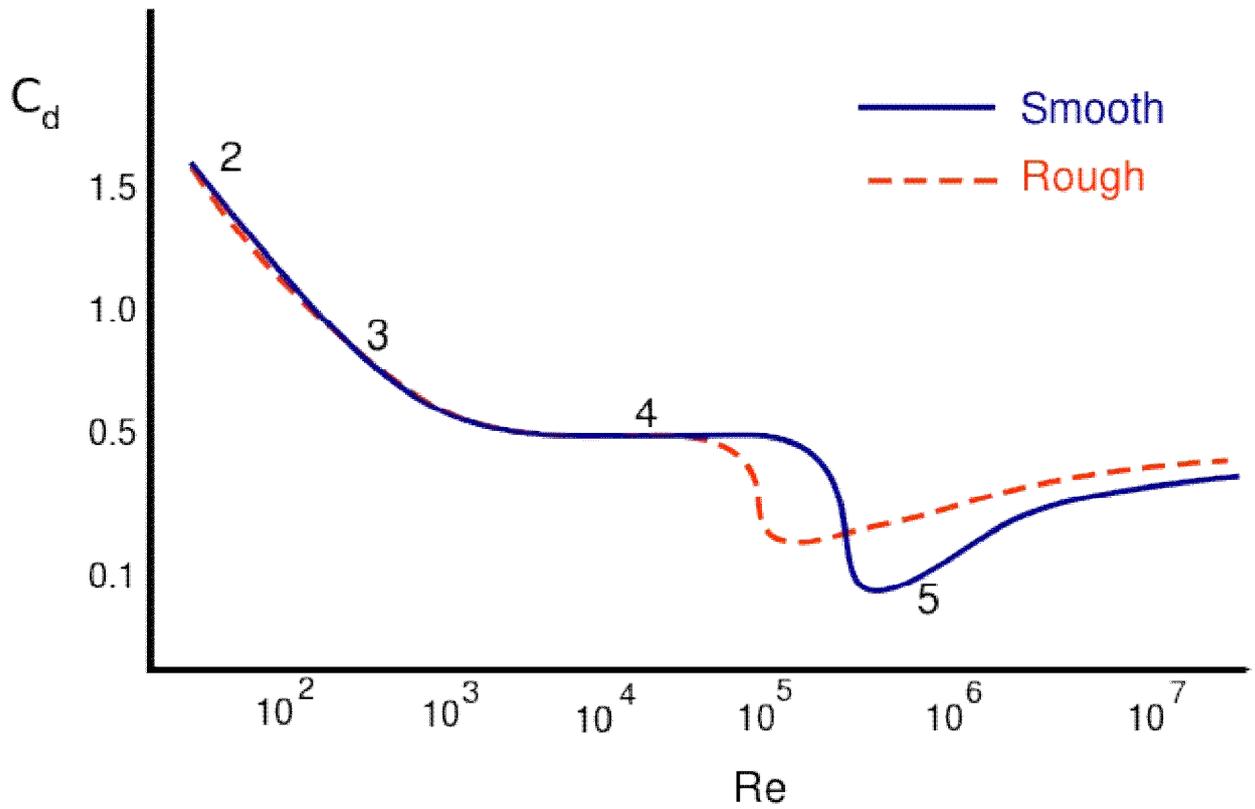


Figura 5.1.1 Coeficiente de arrastre vs. Número de Reynolds. ([https://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient)). Se ilustran los resultados experimentales incluyendo la influencia de la rugosidad de la superficie. La región de la figura en la que aparece el movimiento de Poiseuille (ley de Stokes) a bajos números de Reynolds indica la ausencia de turbulencia. Obsérvese el salto brusco de los puntos en la región en que el número de Reynolds es del orden de millares. La transición laminar-turbulento ocurre en esa zona no importa de qué fluido se trate. La universalidad aquí se expresa muy claramente al tratarse de una relación entre magnitudes que no dependen del sistema de unidades.

### 5.1.2. El problema de Boussinesq

Un cuerpo sólido de longitud característica  $a$  se encuentra en una corriente líquida de velocidad  $v$  mantenido a una diferencia de temperatura  $\theta$  respecto a las partículas alejadas más frías del líquido. Se busca hallar el flujo calórico (calor perdido por el cuerpo en la unidad de tiempo). Aquí hay, además, otros parámetros importantes de los cuales depende el problema: si el intercambio de calor obedece a la ley de Fourier.

$$\frac{dq}{dsdt} = -\kappa \nabla(\theta),$$

entonces la conductividad térmica  $\kappa$  del líquido es un parámetro a considerar así como el calor específico  $c$  del mismo. Señalaremos que a menudo se plantea este problema con el calor específico de la unidad de volumen, pero como estamos más familiarizados con el calor específico entendido por el de la unidad de masa, y no hay ninguna diferencia esencial, trabajaremos con este último. Aquí el problema deja de ser puramente mecánico. Entra una magnitud que caracteriza el comportamiento microscópico, a saber, la temperatura, a la cual le asignaremos su unidad independiente  $\theta$  de manera que la base se amplía en este caso. La matriz dimensional es:

	$q$	$a$	$v$	$\theta$	$c$	$\kappa$
$\mathcal{L}$	2	1	1	0	-1	1
$\mathcal{M}$	1	0	0	0	1	1
$\mathcal{T}$	-3	0	-1	0	-2	-3
$\Theta$	0	0	0	1	-1	-1

*Esto da dos productos nildimensionados independientes*

$$\Pi_1 = \frac{a\theta\kappa}{q}$$

$$\Pi_2 = \frac{a^2\nu\theta c}{q}$$

*Podemos construir el producto:*

$$\Pi_3 = \Pi_1^{-1}\Pi_2 = \frac{a\nu c}{\kappa}$$

$$\text{y } \Pi_4 = \Pi_1^{-1} = \frac{q}{a\theta\kappa}$$

*entonces*

$$\Pi_4 = \phi(\Pi_3)$$

*o sea*

$$q = a\theta K \cdot f\left(\frac{a\nu c}{\kappa}\right). \quad (5.1.2.1)$$

*Esta ecuación nos brinda la información de que la pérdida de calor del cuerpo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura. Además, si se cambia el tamaño del sólido y la naturaleza y velocidad del fluido de modo que el monomio  $\Pi_3$  no cambie, la pérdida de calor es proporcional y la conductividad calorífica del líquido y las dimensiones del sólido.*

*Este problema de Boussinesq es famoso en el Análisis Dimensional por las controversias que han suscitado, especialmente la polémica que suscitó Riabouchinski al observar que, si en vez de*

considerar la temperatura como magnitud independiente se define como la energía media de las moléculas, se llega a un resultado diferente. En efecto, el lector puede comprobar que manteniendo la base  $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$  y atribuyendo a la temperatura las dimensiones de energía, la situación cambia en cierta forma, dando lugar a los monomios anteriores, pero surgiendo ahora otro monomio:

$$\Pi_5 = c\alpha^3,$$

con lo que la solución es menos precisa que la dada por (5.1.2.1). Los distintos autores argumentan de distinta forma sobre lo correcto e incorrecto del razonamiento de Rjabouchinski y no vamos aquí a detallar los argumentos. En nuestra opinión la solución (5.1.2.1) es correcta y lo que ocurre es que para poder identificar la temperatura con la energía es necesario hacerlo a través de una constante universal: la constante  $k_B$  de Boltzmann, de la cual no podemos prescindir. El proceder de Rjabouchinski es equivalente a hacer  $k_B = 1$  sin dimensiones y por lo tanto trabaja con una base mutilada, por lo cual obtiene el monomio  $\Pi_5$  que en nuestra opinión es espurio.

En lo referente a la base utilizada, señalaremos que en este tipo de problemas es posible trabajar con el calor como unidad independiente.

En este caso las unidades de los distintos coeficientes son las siguientes:

1. Conductividad térmica, que entra en la Ley de Fourier:

$$\frac{dq}{dsdt} = -\kappa \nabla(\Theta); \quad [\kappa] = QL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1} = MLT^{-3}\Theta^{-1}$$

2. *Conductividad superficial, que entra en la ley de intercambio de un sólido con un medio fluido:*

$$\frac{dQ_o}{dSdt} = H(\theta - \theta_o)$$

$$[H] = QL^{-2}T^{-1}\Theta^{-1} = MT^{-3}\Theta^{-1}$$

3. *Calor específico, que entra en  $Q = mc\Delta\theta$*

$$[c] = QM^{-1}\Theta^{-1} = L^2T^{-2}\Theta^{-1}$$

### 5.1.3 Anemómetro de alambre

*Los anemómetros de alambre van acoplados a circuitos medidores cuya calibración se basa en la variación de la resistencia del alambre al variar la temperatura del mismo por efecto de la velocidad del fluido en sus alrededores.*

*Se basa en el efecto de enfriamiento que sobre un alambre calentado por una corriente eléctrica produce una corriente de fluido. Es de utilidad para medir flujos de gases. Se utiliza, por ejemplo, en los aparatos que bombean el corazón artificial, en meteorología, etc.*

*El problema ya ha sido considerado teóricamente para el caso de fluidos laminares, pero es evidente que cuando hay turbulencia este problema solo puede encararse, al menos hasta ahora, por Análisis Dimensional. Además de las magnitudes anteriores consideradas en el problema de Boussinesq, aquí influye la viscosidad cinemática ( $\nu$ ) del fluido, por depender de ella la turbulencia. Sin embargo, esto simplifica las cosas pues sabemos que la viscosidad es proporcional*

a la conductividad térmica, por lo que el monomio  $(cv / \kappa)$  es un número. Así podemos dejar de trabajar con  $c$  en la matriz dimensional. Además para simplificar el trabajo utilizaremos la base  $(L, T, \Theta, Q)$ . La matriz dimensional es:

	$h$	$v$	$\theta$	$r$	$\kappa$	$v$
$\mathcal{L}$	-1	1	0	1	-1	2
$\mathcal{T}$	-1	-1	0	0	-1	-1
$\Theta$	0	0	1	0	-1	0
$\mathcal{Q}$	1	0	0	0	1	0,

donde  $h$  es la pérdida de calor por unidad de longitud y tiempo y  $r$  es el radio del alambre.

Esta matriz es de rango 4, por lo que saldrán los monomios  $\mathcal{PI}$  independientes, que pueden ser:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{v}{vr} \\ \Pi_2 &= \frac{\theta\kappa}{h} \end{aligned} ,$$

con los cuales puede plantearse la relación universal:

$$v = \frac{v}{r} \cdot \phi \left( \frac{h}{\kappa\theta} \right) ,$$

que pone de manifiesto la posibilidad de medir las fluctuaciones de  $v$  en una corriente turbulenta por los cambios del cociente  $h / \theta$  y la posibilidad de calibrar los anemómetros de alambre en

*condiciones distintas y con materiales distintos a los que se usen en los sistemas prototipos, basándonos en la universalidad de la relación  $\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$ .*

## ***5.2 Consideraciones dimensionales para la pulverización del combustible***

*Es de extremo interés para lograr una alta eficiencia en la combustión el lograr un buen funcionamiento de los pulverizadores de combustible. El diseño de los mismos es una tarea compleja, dependiente de muchos factores, y la variedad de quemadores es enorme.*

*Una pregunta que hasta el momento permanece aún sin responder es cómo lograr el diseño de un banco de pruebas de quemadores que refleje con cierto rigor, y no sólo en forma intuitiva, el trabajo del quemador en condiciones reales.*

*Dicho problema, en nuestra opinión, puede enfocarse por la vía del Análisis Dimensional. Como existe una gran variedad de formas de pulverización, no pretenderemos aquí más que señalar las vías de análisis del mismo, limitándonos a la situación más sencilla.*

*Supongamos al quemador determinado sólo por la talla característica del canal de salida  $\delta$ . Por otro lado, puede sentarse como hipótesis que la distribución de gotitas pulverizadas por radio estará determinada por el radio máximo en la distribución. Esta aseveración cae fuera de los marcos del Análisis Dimensional y nos permitiremos tomarla como punto de partida. Según demostramos (ver bibliografía) una vez conocido el radio máximo pulverizado, el resto de las características de la distribución puede conocerse a través de la medición del "inquemado". (Cantidad de combustible que no se termina de consumir, quedando como residuo de la combustión).*

El radio máximo de las gotas dependerá de la presión de inyección  $P$ , la densidad y viscosidad del combustible,  $\rho$  y  $\eta$ , y la tensión superficial  $\sigma$ .

Dejamos al lector plantear la matriz dimensional en la base  $(L, M, T)$ . Con estas magnitudes puede verse que es posible tomar tres productos nildimensionados. Escojamos los siguientes:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\eta^2}{\rho\delta\sigma} \\ \pi_2 &= \frac{\eta}{\sigma} \sqrt{\frac{P}{\rho}} n, \\ \pi_3 &= \frac{r}{\delta}\end{aligned}$$

donde  $\pi_3$  pudo interpretarse desde el inicio como un factor de forma. Ahora vamos a plantearnos el problema de modelar la pulverización de otro líquido que llamaremos líquido de prueba (puede ser agua, lo cual es bastante asequible, en principio). La dependencia que conviene plantearse es:

$$\pi_3 = \phi(\pi_1, \pi_2),$$

o sea

$$r = \delta \cdot \phi\left(\frac{\eta^2}{\rho\delta\sigma}, \frac{\eta}{\sigma} \sqrt{\frac{P}{\rho}}\right)$$

Esto daría el radio máximo expresado a través de una función de dos variables independientes que son los monomios  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Esto se puede simplificar ajustando  $\pi_1$  de forma que sea el mismo en el caso del combustible que en el del líquido de prueba. Entonces estaríamos fijando una plano  $\pi_1 = cte$  y estudiamos el comportamiento de la función

$$\pi_3 = f(\pi_2) ,$$

en ese plano, que es el mismo en el modelo y el prototipo, por lo que esta función será la misma en ambos casos. A nadie escapa la importancia de conocer la dependencia anterior, sobre todo en los casos en que es necesario escoger los quemadores adecuados para diferentes tipos de combustible, o bien ajustar las presiones de trabajo, controlar las viscosidades, etc.

Supongamos en forma arbitraria que el prototipo es petróleo y el líquido de prueba es agua.

Entonces el ancho del canal de salida en el caso del agua en relación con el del petróleo debe ser, considerando que las densidades del agua y el petróleo son muy parecidas (lo cual se cumple muy bien en el caso del crudo y el fuel-oil):

$$\frac{\delta_a}{\delta_p} \approx \left[ \frac{\eta_a}{\eta_p} \right]^2 \frac{\sigma_p}{\sigma_a} ,$$

donde el subíndice "a" indica el agua y "P" el petróleo. En el caso de que el combustible no tenga una densidad semejante a la del agua, entonces

$$\frac{\delta_a}{\delta_p} = \left[ \frac{\eta_a}{\eta_p} \right]^2 \frac{\rho_p \sigma_p}{\rho_a \sigma_a} .$$

Aquí el factor determinante lo constituye la relación de viscosidades. Como  $\eta_p \approx \eta_a$  entonces

$\delta_a \approx \delta_p$  y la ecuación anterior nos da la magnitud  $d$  conociendo las características del combustible y del quemador que se utiliza. Entonces puede construirse el modelo sobre la base de estos datos.

Una vez fijados estos parámetros, puede estudiarse la relación entre el radio máximo "r" pulverizado en función de las condiciones de trabajo ya que en virtud del teorema  $\Pi$  se cumple:

$$r = \delta \cdot \phi \left( \frac{\eta}{\sigma} \sqrt{\frac{P}{\rho}} \right).$$

*La realización de experimentos "a escala" con el líquido patrón (en este caso pusimos como ejemplo el agua) da como resultado la dependencia de  $\pi_3$  con respecto a  $\pi_2$ . Cuando se obtenga para el líquido patrón un valor de  $p$  igual al que se tiene en condiciones reales para el caso del petróleo, entonces el valor de  $\pi_3$  en este líquido será el mismo que en el caso del combustible y se cumple:*

$$r_p = \frac{\delta_p}{\delta_a} r_a .$$

*Así, midiendo el radio de la máxima gota de agua pulverizada puede saberse el radio de la máxima gota de combustible  $r_p$ . Además, es importante ver que el conocimiento de la dependencia de  $\pi_3$  con respecto a  $\pi_2$ , se puede hallar experimentalmente con relativamente pocos recursos en condiciones de laboratorio, sin necesidad de ensayar en escalas industriales lo cual en muchas ocasiones es sencillamente imposible.*

*Esto es un esbozo, si bien con las características del necesario rigor, de los trabajos experimentales que pueden hacerse en materia de quemadores.*

*También queremos señalar explícitamente que la dependencia entre  $\pi_2$  y  $\pi_3$  puede dar respuesta a una preocupación común de los diseñadores. Dado un tipo de quemador, cual debe ser la presión para que la nebulización sea lo mejor posible, lo cual se puede conocer a través de los valores de  $\pi_3$  correspondientes a los distintos valores de  $\pi_2$ . Insistimos en que al aplicar las técnicas del Análisis Dimensional es necesario no sobre especificar variables. Por ejemplo, puede pensarse con*

justeza que la pulverización depende de la temperatura del líquido, pero la temperatura actúa sobre el fenómeno a través de su influencia en  $\eta$ ,  $\rho$  y  $\sigma$  por lo que no es correcto incluirla.

### 5.3 Oscilador de Hartmann

Se utiliza para producir ultrasonido. Consiste en una tobera que expulsa un fluido a velocidad supersónica contra una cavidad cilíndrica de diámetro  $d$  y profundidad  $h$ . Para una distancia adecuada  $L$  entre la tobera y la cavidad, la misma oscila con una intensidad máxima a una frecuencia  $\omega$ .

Llamemos  $v$  a la velocidad del fluido y  $c$  a la velocidad del sonido en el medio. En una primera aproximación, estos son los parámetros que determinan la frecuencia de trabajo de dicho oscilador.

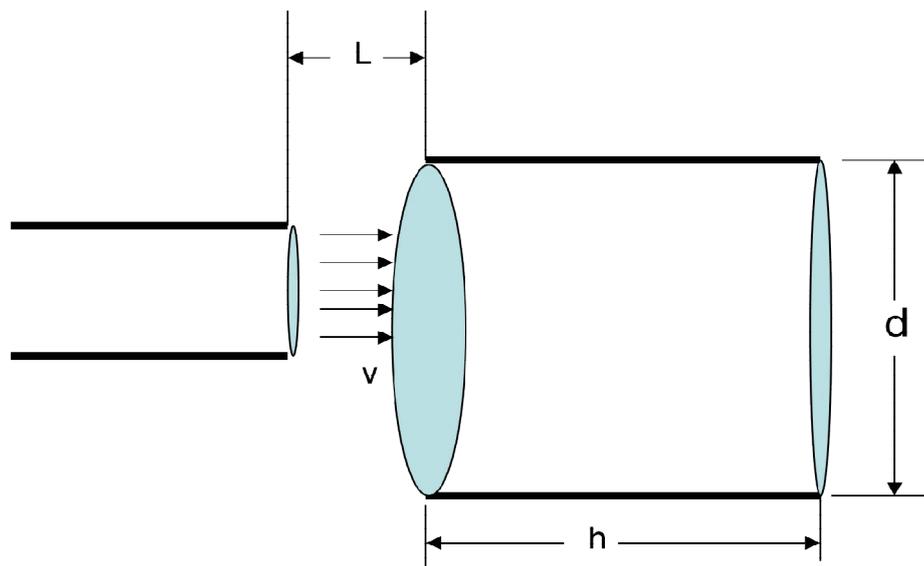


Figura 5.3.1.- Esquema del oscilador de Hartmann

Como los parámetros del problema no contienen unidades de masa, usaremos la base  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{T}$  sin temor a que sea mutilada. Hay dos factores de forma, a saber:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \frac{d}{L}, \\ \tilde{\omega}_2 &= \frac{v}{c},\end{aligned}$$

El segundo factor se llama **número de Mach**. Podemos entonces eliminar  $v$  y  $h$  de los parámetros y formar la matriz dimensional:

$$\begin{array}{cccc} & \omega & d & c \\ \mathcal{L} & 0 & 1 & 1 \\ \mathcal{T} & -1 & 0 & -1,\end{array}$$

que da un sólo monomio  $\mathcal{PI}$ :  $\pi_1 = \omega d / c$ .

Entonces

$$\pi_1 = \phi(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$$

Manteniendo  $\tilde{\omega}_2$  constante, puede modelarse este oscilador mediante la relación:

$$\omega = \frac{c}{d} \cdot \phi\left(\frac{d}{L}\right).$$

Lo cual se confirma experimentalmente. La fórmula experimental para la frecuencia del oscilador es:

$$\omega = \frac{2\pi c}{d} \left( \frac{1}{4 \frac{L}{d} + 0.3} \right).$$

La frecuencia de este oscilador no depende significativamente de la distancia entre la tobera y la cavidad. Esta conclusión no se extrae en realidad del Análisis Dimensional, sino de la propia física del problema, ya que las oscilaciones de la cavidad dependen de su propia geometría fundamentalmente, y como la distancia  $L$  en general influye poco en esa geometría, entonces la frecuencia del oscilador se verá poco influida por  $L$ , como en efecto se observa. (Ver "ultrasonics", Benson Carlin, Mc GrawHILL, 1960).

La intensidad de la oscilación sí debe depender de  $L$ . Incluyamos dentro de los parámetros a  $\omega$  y hallemos la potencia total suministrada al fluido. La matriz dimensional es:

$$\begin{array}{rcccccc}
 I & L & \omega & v & \eta & d & \\
 \mathcal{M} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \mathcal{L} & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
 \mathcal{T} & -3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0.
 \end{array} \tag{5.3.1}$$

Los factores:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}_1 &= \frac{v}{c} \\
 \tilde{\omega}_2 &= \frac{\rho v d}{\eta}, \\
 \tilde{\omega}_3 &= \frac{d}{L}
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

salen por simple inspección.

Con la matriz (5.3.1) se pueden formar tres productos nildimensionados:

$$\pi_1 = \frac{L}{d}$$

$$\pi_2 = \frac{I}{v^2 \eta L}$$

$$\pi_3 = \frac{v}{\omega L}$$

Manteniendo la constancia de los factores (5.3.2), tenemos

$$I = v^2 \eta L \cdot \phi \left( \frac{v}{\omega L}, \frac{L}{d} \right).$$

Podemos pasar a

$$I = v^2 \eta L \cdot \phi \left( \frac{v}{\omega d}, \frac{L}{d} \right),$$

si mantenemos  $(v / \omega d)$  constante entonces

$$I = v^2 \eta L \cdot f \left( \frac{L}{d} \right),$$

por lo que puede estudiarse la dependencia de  $I$  con  $L$  por esta vía.

#### 5.4 Onda de choque de la explosión nuclear (Taylor)



Figura 5.4.1

[https://es.wikipedia.org/wiki/Prueba\\_Trinity#/media/Archivo:Trinity\\_Test\\_Fireball\\_16ms.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Prueba_Trinity#/media/Archivo:Trinity_Test_Fireball_16ms.jpg)

*La primera apreciación de la energía desprendida por una explosión nuclear por inspección fotográfica se debe a G. I. Taylor.*

*Taylor supuso que la energía liberada por la bomba debía “perder la memoria” de su forma inicial rápidamente y producir una onda de choque en la atmósfera. La estructura de la onda de choque lejos del suelo puede, entonces considerarse esférica. (Figura 5.4.1)*

*Con esta simplificación, Taylor reconoció que los parámetros fundamentales del problema son la energía  $E$ , la densidad  $\rho$  del aire, la presión del aire  $p$ , y el radio de la onda de choque dependiente del tiempo,  $R(t)$ . Debido a la fuerza de la explosión la presión del aire no afecta mucho a la onda, por lo que habrá una sola combinación adimensional de las magnitudes*

*involucradas:  $\frac{Et^2}{\rho R^5}$ , entonces el radio de la onda debe variar con el tiempo en la forma:*

$$R(t) = K \left( \frac{Et^2}{\rho} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

*Si se puede tener una longitud de referencia en una secuencia de fotografías de una explosión nuclear, se puede entonces hallar  $E$ . La cosa es en realidad más compleja, pero la esencia es esa.*

*Entonces si se tiene una longitud de referencia a partir de una secuencia de fotos de una explosión nuclear se sabe su energía*

*G. I. Taylor, en 1946, observando una secuencia de fotografías a intervalos de pocos milisegundos publicada en la prensa de la época, pudo aplicar este método a la explosión de prueba que se hizo en Alamogordo, Nuevo México, previo al lanzamiento de la bomba de Hiroshima. Con los datos que se tenía de las fotos, obtuvo:*

$$\underline{E \approx 10^{20} - 10^{21} \text{ erg}}$$

*Hay que decir que las autoridades sospecharon de Taylor ya que todo lo referente a la bomba era absolutamente secreto, y el valor obtenido por él era muy cercano a la realidad. No era creíble que de unas fotos se pudiera sacar tal dato!!!*

### **5.5 Análisis Dimensional de las ecuaciones de balance en fluidos**

*Apliquemos el análisis dimensional al análisis de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Como veremos, esto tiene mucha utilidad al permitirnos obtener los criterios de semejanza más comunes para modelación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \end{array} \right\}$$

$$t_* = \frac{t}{t_0} \quad x_* = \frac{x}{l_0}, \quad y_* = \frac{y}{l_0}, \quad z_* = \frac{z}{l_0}$$

$$v_* = \frac{v}{v_0} \quad p_* = \frac{p}{p_0} \quad \mu_* = \frac{\mu}{\mu_0} \quad g_* = \frac{g}{g_0}$$

*Con otros cambios de escala queda*

$$\nabla_* \cdot v_* = 0$$

$$\frac{\rho_0 v_0}{t_0} \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} v_* \cdot \nabla_* v_* = -\frac{p_0}{l_0} \nabla_* p_* + \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2} \mu_* \nabla_*^2 v_* + \rho_0 g_0 g_*$$

donde

$$\nabla_* = l_0 \nabla$$

$$\nabla_*^2 = l_0^2 \nabla^2$$

$$\partial_{t_*} = t_0 \partial_t$$

Multiplicando por  $\frac{l_0}{\rho_0 v_0^2}$

$$\left( \frac{f_0 l_0}{v_0} \right) \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + v_* \cdot \nabla_* v_* = - \left( \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \right) \nabla_* p_* + \left( \frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0} \right) \mu_* \nabla_*^2 v_* + \left( \frac{g_0 l_0}{v_0^2} \right) g_* \quad (5.5.1)$$

Y las magnitudes entre paréntesis son los números adimensionales:

$$S_t = \frac{f_0 l_0}{v_0} \quad (\text{Strouhal}) \quad R_e = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu_0} \quad (\text{Reynolds})$$

$$E_u = \frac{P_0}{\rho_0 v_0^2} \quad (\text{Euler}) \quad F_r = \frac{v_0^2}{g_0 l_0} \quad (\text{Froude})$$

Si como presión de referencia escogemos  $P_0 = \rho_0 v_0^2$  (5.5.1) se simplifica:

$$S_t \frac{\partial v_*}{\partial t_*} + v_* \cdot \nabla_* v_* = -\nabla_* P_* + \frac{1}{R_e} \mu_* \nabla_*^2 v_* + \frac{1}{F_r} g_*$$

Así, tenemos los siguientes números adimensionales de la mecánica de fluidos:

$R_e$ : Relación de las fuerzas de inercia con las de viscosidad

$S_i$ : Relación entre la aceleración inercial y la convectiva

$F_r$ : Relación entre fuerzas de inercia y gravitatorias. Interviene mucho en el estudio de corrientes en superficies libres.

Además de estos números adimensionales, en mecánica de fluidos hay otros muy útiles. A continuación resumimos algunos:

**Tabla 5.5.1 Algunos números en mecánica de fluidos**

Número	Magnitudes	Significado
<i>Reynolds</i> $Re = \frac{\rho v l}{\eta}$	$\rho$ - densidad $v$ - velocidad $l$ - longitud característica $\eta$ - viscosidad	Relación entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad
<i>Euler</i> $Eu = \frac{\rho v^2}{P}$	$\rho$ - densidad $v$ - velocidad $P$ - Presión	Relación entre las fuerzas de inercia y las de presión
<i>Froude</i> $Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}$	$v$ - velocidad $L$ - longitud característica $g$ - aceleración de la gravedad	Relación entre las fuerzas de inercia y las gravitatorias
<i>Cauchy</i> $Ca = \frac{\rho v^2}{E}$	$\rho$ - densidad $v$ - velocidad $E$ - módulo de Young	Relación entre las fuerzas de inercia y las de elasticidad
<i>Mach</i> $Ma = \frac{v}{c}$	$v$ - velocidad $c$ - velocidad del sonido en el fluido	Relación entre la velocidad mecánica y la del sonido
<i>Weber</i> $We = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$	$\rho$ - densidad $L$ - longitud característica $v$ - velocidad $\sigma$ - coeficiente de tensión superficial	Relaciona las fuerzas de inercia y las de tensión superficial

Fuente: O. Sotolongo, A. Posadas, F. Luzón "Datos y Fórmulas para Ciencias e Ingeniería. Ed. Universidad de Almería ISBN 8482407988 (2006)

## 5.6 Turbulencia



<http://losojosdelkinetoscopio.blogspot.com/2011/01/humphrey-bogart.html>

*Ya hemos visto que la turbulencia surge a partir de cierto valor del número de Reynolds, en dependencia de las condiciones experimentales.*

*Sobre la naturaleza de la turbulencia se discute mucho, aún hoy, y es de esperar que este problema continúe siendo uno de los retos mayores de la física durante muchos años más. El problema de la turbulencia es, sin discusión, el más importante de la física clásica contemporánea. (Algunos autores sitúan en este rango, además, la física de los gases granulares, pero este tema es nuevo)*

*No existe una descripción matemática completa de la turbulencia, por lo que en todos los intentos de crear modelos de flujo turbulentos las consideraciones dimensionales juegan un papel primordial.*

*Aquí nos limitaremos a esbozar las líneas fundamentales del modelo de Kolmogorov para la turbulencia, ya que es una aplicación muy ilustrativa del análisis dimensional.*

*En este modelo, los torbellinos de mayor escala ceden su energía a torbellinos de talla menor, hasta llegar a una escala en que la energía se disipa en las colisiones moleculares y donde la viscosidad juega el papel principal (escala de Kolmogorov).*

*Aquí juegan su papel dos escalas de tiempo fundamentales:*

$$T = \frac{u}{v} \text{ tiempo característico del flujo}$$

$$\tau = \frac{l}{u} \text{ tiempo característico de la turbulencia.}$$

*El mecanismo de transferencia de energía es más eficaz cuando los tiempos característicos del flujo medio y de las fluctuaciones coinciden.*

$$\tau = \frac{l}{n} \approx \frac{L}{V} = T$$

*A la escala de Kolmogorov, la energía de estos micro-torbellinos se disipa por fricción viscosa en un tiempo igual a  $\tau_k$ .*

*En este tiempo, la longitud característica de la región de disipación es*

$$l_k \approx (v\tau_k)^{1/2}$$

$$\text{pero } \tau_k = \frac{l_k}{n_k} \Rightarrow \frac{v_k l_k}{v} \approx 1 \quad (v = \frac{\eta}{\rho})$$

*donde tomamos como referencia que el número de Reynolds de los torbellinos de Kolmogorov*

$$\approx 1$$

*la energía de la macroescala  $u^2$  se transmite así a la escala de Kolmogorov en  $\tau = \frac{l}{u}$ , la energía*

*transformada por unidad de tiempo es:*

$$\varepsilon \approx \frac{u^2}{\tau} = \frac{u^3}{l} \therefore \frac{u^3}{l} \approx \frac{u_l^3}{l_l} \approx \frac{u_k^3}{l_k} \quad \text{donde } l > l_l > l_k$$

*En este problema podemos definir la función de disipación viscosa:*

$$\Pi = \frac{\varepsilon l_k^2}{\nu v_k^2} \quad \text{que es uno de los monomios posibles de obtener}$$

$$\varepsilon = \nu \frac{v_k^2}{l_k^2}$$

$$\therefore \nu \frac{v_k^2}{l_k^2} \approx \frac{v_k^3}{l_k} \Rightarrow \frac{v_k l_k}{\nu} \approx 1 \quad \left[ \begin{array}{l} \text{el No. de Reynolds de los} \\ \text{torbellinos disipativos}=1 \end{array} \right]$$

$$\varepsilon \approx \frac{v_k^3}{l_k} \approx \nu \frac{v_k^2}{l_k^2} \rightarrow l_k = \frac{\nu}{v_k}$$

$$\text{para } \nu_t = (\varepsilon l_k)^{1/3}$$

$$\therefore \frac{\nu}{\varepsilon^{1/3}} = l_k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l_k \approx \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \\ \therefore v_k \approx (\varepsilon \nu)^{1/4} \end{array} \right\}$$

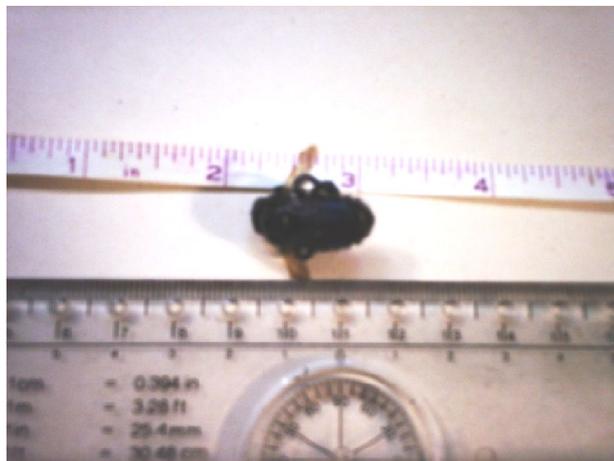
*y tenemos la velocidad característica de los torbellinos en función de la disipación  $\varepsilon$*

*La teoría de Kolmogorov supone que el espectro de energías en cierto rango de vectores de onda sólo depende del vector de onda  $k$  y de  $\varepsilon$ . El análisis dimensional da como resultado que la distribución de energía entre los vectores de onda es:*

$$E(k) = \Pi \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.6.1)$$

*Hay que decir que el modelo de cascada de Kolmogorov es ciertamente controvertido y muchos autores lo consideran dudoso ya que no corresponde a ninguna inestabilidad identificada producida en el fluido. Sin embargo, por razones que no están claras, la ecuación (5.6.1) ha sido comprobada experimentalmente de manera muy precisa (Ley 5/3 de Kolmogorov). Remitimos al lector interesado en este apasionante tema al libro "Turbulence in fluids", M. Lesieur, Kluwer A.P.(1990).*

### 5.7 El vuelo del abejorro



*Figura 5.7.1 Abejorro. La escala se muestra al lado del insecto. Foto del autor*

*Se suele contar una historia que tiene que ver con los límites de la ciencia para explicar todo lo que vemos que involucra a las abejas. Viene a ser casi un dicho hecho: según la ciencia, una abeja no podría volar, pero realmente vuela. La historia tuvo su origen en 1934, cuando el entomólogo*

*francés Auguste Magnan recogió el análisis de un ingeniero, André Saint-Lague, con los cálculos aerodinámicos de la forma de una abeja, comprobando que la fuerza de sustentación de sus alas sería insuficiente para permitir que un cuerpo con ese peso pudiera volar. Simplemente, según el estudio, las alas eran demasiado pequeñas. La propia historia de la aviación muestra cómo los aparatos que hacemos volar tienen unas alas muy grandes, mientras que un simple insecto volador tiene alas pequeñas.*

*El abejorro de tierra o *Bombus terrestris*, es uno de los tipos de abejorros más empleados en la agricultura intensiva, debido a su alto nivel de polinización. Su nombre hace alusión a una determinada fase de su vida en la naturaleza, que como veremos posteriormente, la realiza curiosamente por debajo del nivel del suelo. El *Bombus terrestris* es negro, con una banda blanca al final del abdomen. El tórax y el abdomen están cruzados por una banda amarilla. (En la primera foto no se ve la banda, porque se trata de otra especie, probablemente de un *Bombus Atratus*, o Manganga Negro). El tórax es muy corto y está cubierto de pelo.*

*Existen dos pares de alas membranosas en la parte superior del tórax, con gran cantidad de venas que le dan consistencia en el vuelo. Poseen también tres pares de patas, donde las primeras poseen una escotadura para limpiarse el polen de las antenas, y las últimas poseen una concavidad donde van acumulando granos de polen. A veces se forma una gran masa que impide y dificulta el vuelo del insecto.*

*En definitiva, el abejorro es, en comparación con otros insectos y en general en comparación con otros animales que vuelan, muy poco aerodinámico y aunque su cuerpo está bien concebido para polinizar, la aerodinámica no lo favorece*

*El análisis que aquí haremos para entender por qué puede volar un abejorro se basa en el trabajo de M. A. Deakin "The Physics and Physiology of Insect Flight" Am. J. Phys. 38,4 (1970).*

*Existen estudios muy detallados de este fenómeno y con mayor rigor, pero aquí sólo queremos mostrar la utilidad del Análisis Dimensional para arrojar luz en problemas como éste.*

*Siguiendo la línea ahí trazada, simplificaremos nuestro análisis despreciando la viscosidad del aire y consideraremos que los únicos parámetros importantes en relación al vuelo de los insectos son la frecuencia de batido  $\nu$  y el área  $A$  del ala.*

*Unas aproximaciones tan drásticas seguramente conducirán a errores pero, como veremos, no serán de órdenes de magnitud. Es decir, si lo que queremos es saber con qué frecuencia un abejorro debe batir las alas para volar, la respuesta deberá coincidir con la realidad al menos en el orden de magnitud.*

*Consideraremos como variables relevantes a:*

*$\rho$  -densidad del aire.*

*$m$  - masa del insecto.*

*$g$  - aceleración de la gravedad.*

*$\nu$  - frecuencia de batido del ala.*

*$A$  - área efectiva del ala.*

*Lo que arroja dos productos nildimensionados independientes*

$$\Pi_1 = \frac{\rho A^{\frac{3}{2}}}{m}$$

$$\Pi_2 = \frac{v^2 A^{\frac{1}{2}}}{g},$$

o sea

$$v = g^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{4}} \psi \left( \rho \frac{A^{\frac{3}{2}}}{m} \right),$$

donde  $\psi$  es cierta función.

El monomio  $\Pi_1$  relaciona la masa de una porción de aire aproximadamente del tamaño del insecto con la masa del propio insecto. Entonces  $\Pi_1 \ll 1$  y desarrollaremos  $\psi(\Pi_1)$  en serie de

Frobenius:

$$\psi(\Pi_1) = k\Pi_1^\alpha (1 + a_1\Pi_1 + a_2\Pi_1^2 + \dots) \approx k\Pi_1^\alpha.$$

Así:

$$v \approx g^{\frac{1}{2}} \rho^\alpha k m^{-\alpha} A^{\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)}$$

Sea  $\lambda = \frac{m}{A}$  la "carga" a que se somete unidad de área del ala. Entonces

$$v \approx k g^{\frac{1}{2}} \rho^\alpha m^{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} A^{\left(\frac{3\alpha-1}{2}\right)}$$

Se ha determinado (N. Rashevski "Mathematical Biophysics" Dover, N.Y.1960, Vol 2) que  $v$

depende de  $\lambda$  linealmente, por lo cual  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Entonces

$$v = k \sqrt{\frac{mg}{A\rho}}$$

Con los datos aportados por Rashevskij se puede hallar que  $k \approx 7,22 \times 10^{-2}$ .

Esta sencilla fórmula podemos aplicarla a la abeja común con  $m \approx 10^{-3} \text{g}$ ,  $A \approx 6 \times 10^{-3} \text{cm}^2$ , y teniendo en cuenta que la densidad del aire es  $\rho \approx 1.21 \times 10^{-3} \text{g/cm}^3$  da para  $v$  entre 300 y 350 Hz. El valor experimental; es 250 Hz, por lo que al parecer, a pesar de las muchas aproximaciones, la fórmula obtenida no es tan mala.

Llama la atención el elevado valor de  $v$ , ya que la máxima frecuencia de un estímulo nervioso es 35 Hz, muy por debajo de lo requerido para que una abeja ordinaria (y con mayor razón un abejorro) pueda volar. Los nervios no pueden transmitir impulsos tan rápidos Así, “es matemáticamente imposible que un abejorro vuele”.

Pero los abejorros no saben nada de matemáticas... y vuelan.

Resulta que algunos grupos de insectos poseen un músculo atípico para el vuelo cuya contracción no se debe a un estímulo nervioso sino a una respuesta directa a la “carga”  $\lambda$  del ala. Esto fue demostrado experimentalmente (J. W. S. Pringle “The Physics of Insects” M. Ricstein, Ed. Academic, N.Y. 1965 Vol 2). Es así que el Análisis Dimensional permite explorar problemas biológicos. En este caso, comprobando conclusiones sobre la existencia de un tipo diferente de músculo, lo que reviste gran importancia en el estudio de la fisiología muscular.

### ***Bibliografía recomendada***

*Cierto número de obras tienen un buen tratamiento del Análisis Dimensional. Para iniciarse, vale la pena comenzar por:*

1. Víctor L. Streeter.- *Mecánica de los fluidos*. Ed. Pueblo y Educación, La Habana, 1986.

*Un magnífico resumen de Análisis Dimensional, en el estilo riguroso característico de la obra, puede encontrarse en:*

2. J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, R. A. Trejo. *Análisis Matemático*, Tomo 3, Ed R, La Habana, 1967.

*Buena cantidad de ejemplos y una discusión original del problema de Boussinesq, puede encontrarse en:*

3. J. Palacios.- *Análisis Dimensional*. Espasa-Calpe. S.A, Madrid, 1964
4. L.I. Sedov.- *Métodos de Semejanza y Dimensionalidad en mecánica* (en ruso) Ed. "Nauka", Moscú 1981, donde aparecen también multitud de ejemplos.

*Para ver una buena crítica de los fundamentos de la teoría, puede consultarse:*

5. G. Birkhoff. - *Hydrodynamique*. Ed. Dunod, Paris, 1955.

*La construcción de modelos de escala se discute con bastante claridad en:*

6. E. Becerril.- *Hidromecánica*. Ed. Dossat, S.A. Madrid, 1960.

*Como tema avanzado de matemática, el empleo de los métodos dimensionales en la solución de ecuaciones cuasi lineales puede verse en:*

7. A.A. Iliushin.- *Mecánica de los Medios Continuos* (en ruso). Ed. Universidad de Moscú, 1978.

8. J. A. Belinchón- *Ordinary differential Equations through Dimensional Analysis*.

*ArXiv: physics/0502154v1 28 Feb. 2005.*

*Para los interesados en los últimos temas relativos a la combustión puede verse:*

9. O. Sotolongo. "Modelo Fractal para la combustión de emulsiones". *Revista Ciencias Matemáticas, Universidad de La Habana Vol 13, No.1 1992.* y "Combustion of Fractal Distributions" [arXiv:cond-mat/9403084](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9403084)

*Para más aplicaciones en distintos campos, con una presentación algo diferente del método de determinación de los monomios PI ver:*

10. Thomas Szirtes- *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Elsevier Science and Technology Books, 2006.

*Además de :*

11. Rudolph Kurth.- *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics*. Pergamon Press 1972.