UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS

Instituto de Investigación en Ciencias Básicas y Aplicadas

Problema de Sturm-Liouville en la Física de la Materia Condensada actual

Rolando Pérez Álvarez, Miladys Despaigne Rosell y Oscar E. Nazario Sánchez

Centro de Investigación en Ciencias-IICBA,
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
rpa@uaem.mx

Índice

1. 180 años del problema de Sturm y Liouville.
2. Sistemas a capas; excitaciones y problemas.
3. Difusión en sistemas anisótropos e inhomogéneos.
4. Teoría de masa efectiva en sistemas anisótropos e inhomogéneos.
5. Modelo Fenomenológico completo para los modos ópticos polares.
6. Excitaciones magnetoeléctricas.
7. ¿Hace falta una generalización del problema de SL?
8. Conclusiones y comentarios.

EXTRAIT

D'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable ;

Par MM. C. STURM et J. LIOUVILLE.

Soient x une variable indépendante comprise entre deux limites données x, X ; g, k, l trois fonctions positives de x ; r un paramètre indéterminé ; et V une fonction de x et de r, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$\frac{d\left(k\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)\mathrm{V} = 0, \tag{1}$$

et à la condition définie

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} - h\mathrm{V} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x}, \tag{2}$$

dans laquelle h représente un nombre donné positif. Il est aisé de trouver une fonction V qui vérifie ces deux équations et qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, lorsque x reste indéterminée. On s'est beaucoup occupé des propriétés de la fonction V dans différents mémoires auxquels nous renverrons le lecteur[1].

[1] C. Sturm and J. Liouville. « Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis a satisfaire a une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable. » french. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1837), pp. 220-222. url: http://eudml.org/doc/235395.

[2] J. Liouville. « Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis a satisfaire a une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable. » fre. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1837), pp. 16-35. url: http://eudml.org/doc/235133.

[3] J. Liouville. « Troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis a satisfaire a une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable. » fre. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1837), pp. 418-436. url: http://eudml.org/doc/233892

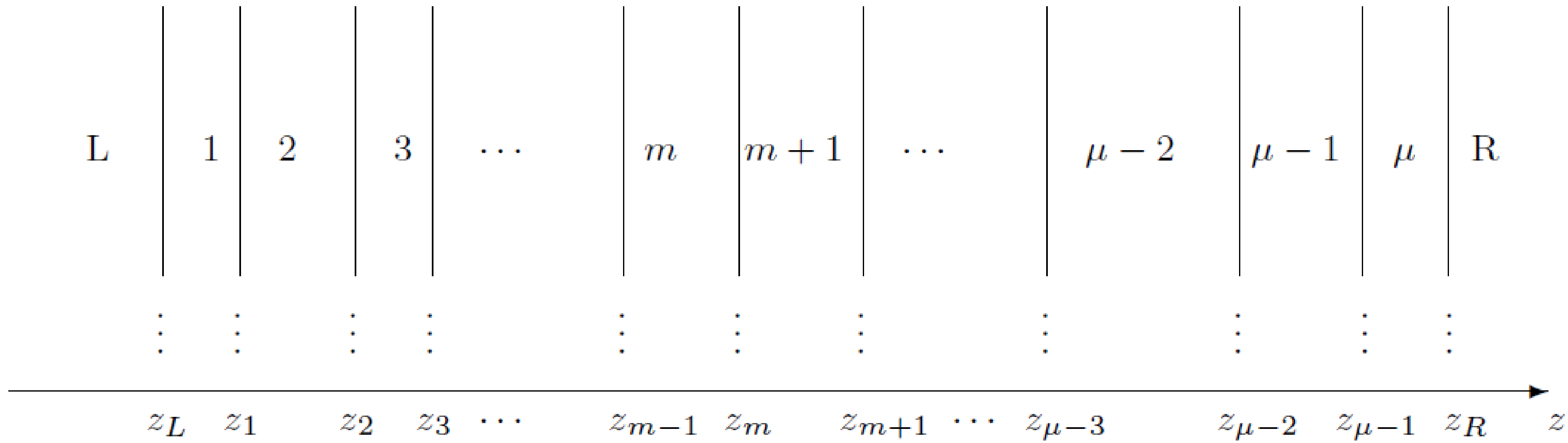
[4] Anton Zettl. *Sturm-Liouville Theory*. Mathematical Surveys and Monographs, 2005. isbn: 0-8218-3905-5 (alk. paper).
doi: http://dx.doi.org/10.1090/surv/121.

[5] W. Norrie Everitt. “A Catalogue of Sturm-Liouville Differential Equations”. In: *Sturm-Liouville Theory: Past and Present*. Ed. by Werner O. Amrein, Andreas M. Hinz, and David P. Pearson. Basel: Birkauser Basel, 2005, pp. 271-331. isbn: 978-3-7643-7359-7.
doi: 10.1007/3-7643-7359-8_12
url: http://dx.doi.org/10.1007/3-7643-7359-8_12

Def.	Ecuación	Intervalo	Condición sobre p	Condición sobre q	Condición sobre w	Enfoque de autovalores	Ref.
1	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	Real, continua, positiva y con derivada continua.	Real y continua	Real, continua y positiva.	no	[1]
2	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a<x<b$	continua y positiva.	continua	continua y positiva.	si	[2]
3	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a<x<b$	Real, continua, positiva y con derivada continua.	Real y continua	Real, continua y positiva.	si	[3], [16]
4	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y-\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	Real	Real	Real	si	[4]
5	$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-q(x)y+\lambda w(x)y=0$	$a\leq x\leq b$	continua, positiva y con derivada continua.	continua	continua y positiva.	si	[5], [9]

Probablemente lo más importante es que suceda lo siguiente:

$$\boxed{\langle \hat{L} f | g \rangle = \langle f | \hat{L} g \rangle + \left[p \left(g f' - f g' \right) \right]_a^b}$$



Forma general de una heteroestructura con capas extremas L (izquierda), R (derecha) y desde 1 hasta μ son las distintas capas intermedias entre z_L y z_R. A menos que se indique otra cosa, la capa L va de $-\infty$ a z_L mientras que R va de z_R a $+\infty$. $z_0 \equiv z_L$ y $z_\mu \equiv z_R$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(\vec{r},t) &= \mathbf{F}(z)\ \mathrm{e}^{i(\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}-\omega t)} \\
\vec{\kappa} &= \kappa_x \vec{e}_x + \kappa_y \vec{e}_y \\
\vec{\rho} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\ .
\end{aligned}
$$

Excitaciones:

1. Elásticas
2. Oscilaciones ópticas
3. …
4. Electromagnéticas
5. Piezoeléctricas
6. Piezomagnéticas
7. En materiales bianisotrópicos
8. …
9. Teoría de Masa Efectiva
10. Teoría de Funciones Envolventes
11. Pseudopotenciales
12. …
13. Excitaciones superconductoras
14. …

Problemas:

1. Barreras infinitas
2. Extremos libres
3. Condiciones de Bloch
4. …
5. Escape
6. Captura
7. Regularidad en el infinito
8. …

Nosotros nos permitimos escribir la ecuación original y la nuestra con las siguientes notaciones y cambios

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(B(z)\frac{dF(z)}{dz}\right) + W(z)F(z) &= 0 \\
\frac{d}{dz}\left(B(z)\frac{dF(z)}{dz} + P(z)F(z)\right) + Y(z)\frac{dF(z)}{dz} + W(z)F(z) &= 0
\end{aligned}
$$

En lugar de V, estamos denotando F a la función incógnita. El lugar de k en la ecuación como la escribieron Sturm y Liouville ahora lo tiene $B(z)$. Aparecen $P(z)$ y $Y(z)$, y $W(z)$ contiene a $gr - l$. Probablemente lo más importante en esta pequeña generalización de la ecuación de SL que se estudia es la presencia de las funciones $P(z)$ y $Y(z)$. En una cantidad significativa de casos $P(z) = Y(z) = 0$ o las funciones son muy bien comportadas y $P(z) + Y(z) = 0$, con lo cual la ecuación nuestra se reduce a la clásica con una maniobra algebraica sencilla.

Difusión en sistemas anisótropos e inhomogéneos

$$\frac{\partial u(\vec{r},t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{\vec{D}}(\vec{r}) \cdot \nabla u(\vec{r},t) \right)$$

$$u(\vec{r},t) = F(z) \;\; e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}}\, T(t)$$

$$\vec{a} = (D_{31}(z), D_{32}(z), D_{33}(z)) \;\; ; \;\; \vec{b} = (D_{13}(z), D_{23}(z), D_{33}(z))$$

$$\frac{d}{dz}\left[D_{33}(z)\frac{dF(z)}{dz} + i(\vec{\kappa}\cdot\vec{a})F(z)\right] + i(\vec{\kappa}\cdot\vec{b})\frac{dF(z)}{dz} - \left(\vec{\kappa}\cdot\vec{\vec{D}}(z)\cdot\vec{\kappa} - \lambda\right)F(z) = 0$$

$$\frac{d}{dz}\left[B(z)\frac{dF(z)}{dz} + P(z)F(z)\right] + Y(z)\frac{dF(z)}{dz} + W(z)F(z) = 0$$

$$B = B^{\dagger} \;\; ; \;\; P = -Y^{\dagger} \;\; ; \;\; W = W^{\dagger}$$

Teoría de masa efectiva en sistemas anisótropos e inhomogéneos

$$\frac{1}{2}\hat{\vec{p}}\cdot\left[\vec{\vec{\nu}}(\vec{r})\cdot\hat{\vec{p}}F(\vec{r})\right]+(V(\vec{r})-E)F(\vec{r})=0$$

$$\hat{\vec{p}}=-i\hbar\nabla \;\;;\;\; \vec{\vec{\nu}}(\vec{r})=\left[\vec{\vec{\mu}}(\vec{r})\right]^{-1}$$

$$F(\vec{r})=F(z)\;e^{i\vec{\kappa}\cdot\vec{\rho}}$$

$$\vec{a}=(\nu_{31}(z),\nu_{32}(z),\nu_{33}(z)) \;\;;\;\; \vec{b}=(\nu_{13}(z),\nu_{23}(z),\nu_{33}(z))$$

$$\frac{d}{dz}\left[\nu_{33}(z)\frac{dF(z)}{dz}-i(\vec{\kappa}\cdot\vec{a})F(z)\right]-i(\vec{\kappa}\cdot\vec{b})\frac{dF(z)}{dz}-\left(\vec{\kappa}\cdot\vec{\vec{\nu}}(z)\cdot\vec{\kappa}-\frac{(V(z)-E)}{\hbar^2}\right)F(z)=0$$

$$\frac{d}{dz}\left[B(z)\frac{dF(z)}{dz}+P(z)F(z)\right]+Y(z)\frac{dF(z)}{dz}+W(z)F(z)=0$$

$$B=B^{\dagger} \;\;;\;\; P=-Y^{\dagger} \;\;;\;\; W=W^{\dagger}$$

Modelo Fenomenológico Completo para excitaciones ópticas polares

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)\cdot\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\varphi+\\
&\quad \frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{\delta}\cdot(\nabla\varphi)+\frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}):\boldsymbol{\lambda}:(\nabla\mathbf{u})\\
\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\lambda}:\nabla\mathbf{u} \quad \text{Hooke}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\varphi+\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0\\
\nabla\cdot\left(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\delta}\cdot\nabla\varphi+\frac{1}{4\pi}\nabla\varphi\right)=0
\end{gathered}
$$

En medios isótropos e inhomogéneos con dependencias en z de los parámetros ... se desacopla el modo TH (Transversal Horizontal) y para los modos sagitales queda:

$$\frac{d}{dz}\left[B(z)\frac{dF(z)}{dz}+P(z)F(z)\right]+Y(z)\frac{dF(z)}{dz}+W(z)F(z)=0$$

$$\mathbf{B}(z)=\begin{pmatrix} \rho\beta_T^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\beta_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\epsilon_\infty}{4\pi} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i\kappa\rho(\beta_L^2-\beta_T^2) & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; \mathbf{Y}(z)=\begin{pmatrix} 0 & i\kappa\rho(\beta_L^2-\beta_T^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}(z)=\begin{pmatrix} -\rho[(\omega^2-\omega_T^2)+\kappa^2\beta_L^2] & -i\kappa(\rho\beta_T^2) & i\kappa\alpha \\ i\kappa(\rho\beta_T^2) & -\rho[(\omega^2-\omega_T^2)+\kappa^2\beta_T^2] & -\alpha' \\ -i\kappa\alpha & -\alpha' & -\frac{\epsilon_\infty}{4\pi}\kappa^2 \end{pmatrix}$$

$$B=B^\dagger \;;\; P=-Y^\dagger \;;\; W=W^\dagger$$

Materiales no polares $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$

Modos acústicos $\Leftrightarrow$ $\beta_T=iv_T;\beta_L=iv_L;\omega_T=\omega_L=0$

Rolando Pérez Álvarez rpa@uaem.mx

Materiales bianisotrópicos

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{E} + \vec{\vec{\chi}} \cdot \vec{B} \\ \vec{H} &= \vec{\vec{\xi}} \cdot \vec{E} + \vec{\vec{\nu}} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

El óxido de cromo antiferromagético es un ejemplo (Astrov, 1960). Dzyalozhinskii en 1960 propuso

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

para las cuatro matrices involucradas.

Tellegen estudió otros sistemas donde las cuatro matrices son escalares y $\chi = \xi$ con $\chi^2 \simeq \epsilon\mu$.

Estudios específicos de propagación de ondas en una subclase de medios bianisotrópicos se pueden encontrar en los trabajos de Chen et al de 2013 y de Chang et al de 2014. En este caso, la estructura de estos tensores es

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\vec{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{\chi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\vec{\xi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\vec{\epsilon}} = \vec{\vec{\epsilon}}(z); \vec{\vec{\chi}} = \vec{\vec{\chi}}(z)$$
$$\vec{\vec{\xi}} = \vec{\vec{\xi}}(z); \vec{\vec{\nu}} = \vec{\vec{\nu}}(z)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\vec{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{E} + \vec{\vec{\chi}} \cdot \vec{B}\right) &= \rho_f \\
\nabla \times \left(\vec{\vec{\xi}} \cdot \vec{E} + \vec{\vec{\nu}} \cdot \vec{B}\right) &= \vec{j}_f + \frac{\partial \left(\vec{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{E} + \vec{\vec{\chi}} \cdot \vec{B}\right)}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\nabla \phi + C_4 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
\vec{H} &= \nabla \times \vec{A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}, t) &= \phi(z)\, e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)} \\
\vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}(z)\, e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{\rho} - \omega t)}
\end{aligned}$$

Para aligerar la carga de índices y en general las notaciones definamos

$$\begin{aligned}
\alpha_{jmn} &= \chi_{jk} e_{kmn} \\
\beta_{ijm} &= e_{ijk} \xi_{km} \\
\gamma_{ijmn} &= e_{ijk} \nu_{kl} e_{lmn} \\
\mathbf{F}(z) &= (F_1, F_2, F_3, F_4)^t = (\phi, A_1, A_2, A_3)^t
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dz}\left(\mathbf{B}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{P}(z)\cdot\mathbf{F}(z)\right)+\mathbf{Y}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{W}(z)\cdot\mathbf{F}(z) \;=\; \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(z) &= \mathbf{B}\left(\vec{\epsilon}(z),\vec{\nu}(z),\vec{\xi}(z),\vec{\chi}(z)\right)\\
\mathbf{P}(z) &= \mathbf{P}\left(\vec{\epsilon}(z),\vec{\nu}(z),\vec{\xi}(z),\vec{\chi}(z)\right)\\
\mathbf{Y}(z) &= \mathbf{Y}\left(\vec{\epsilon}(z),\vec{\nu}(z),\vec{\xi}(z),\vec{\chi}(z)\right)\\
\mathbf{W}(z) &= \mathbf{W}\left(\vec{\epsilon}(z),\vec{\nu}(z),\vec{\xi}(z),\vec{\chi}(z)\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \begin{pmatrix} -\epsilon_{zz} & \alpha_{zz1} & \alpha_{zz2} & \alpha_{zz3}\\ -\beta_{1zz} & \gamma_{1zz1} & \gamma_{1zz2} & \gamma_{1zz3}\\ -\beta_{2zz} & \gamma_{2zz1} & \gamma_{2zz2} & \gamma_{2zz3}\\ -\beta_{3zz} & \gamma_{3zz1} & \gamma_{3zz2} & \gamma_{3zz3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{B}^{\dagger}\\
\mathbf{P} &= -\mathbf{Y}^{\dagger}\\
\mathbf{W} &= \mathbf{W}^{\dagger}
\end{aligned}$$

Ubicuidad del problema de Sturm-Liouville matricial

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\rho}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{F} + \frac{1}{2}\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{F} \\ & + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{F} : \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\nabla}\mathbf{F} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{F} : \boldsymbol{\chi}\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\;.\end{aligned}$$

Caso	$\boldsymbol{\rho}$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\chi}$
Elasticidad	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
Modelo Fenomenológico Completo	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
Electromagnetismo	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$

$$\frac{d}{dz}\left[\mathbf{B}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{P}(z)\cdot\mathbf{F}(z)\right]+\mathbf{Y}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{W}(z)\cdot\mathbf{F}(z) \;=\; \mathbf{0}\,.$$

$$\begin{aligned}
B_{\nu\alpha} &= \frac{1}{2}(\lambda_{3\nu3\alpha}+\lambda_{3\alpha3\nu})\,,\\
P_{\nu\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{i}^{2} i\,\kappa_i\,(\lambda_{3\nu i\alpha}+\lambda_{i\alpha3\nu})+\mu_{\alpha3\nu}-i\omega\,\chi_{3\nu\alpha}\,,\\
Y_{\nu\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{k}^{2} i\,\kappa_k\,(\lambda_{k\nu3\alpha}+\lambda_{3\alpha k\nu})-\mu_{\nu3\alpha}-i\omega\,\chi_{3\alpha\nu}\,,\\
W_{\nu\alpha} &= -\frac{1}{2}\sum_{k}^{2}\sum_{i}^{2}\kappa_k\kappa_i\,(\lambda_{k\nu i\alpha}+\lambda_{i\alpha k\nu})\\
&\quad +i\sum_{k}^{2}\kappa_k\,\mu_{\alpha k\nu}-i\sum_{j}^{2}\kappa_j\,\mu_{\nu j\alpha}\\
&\quad -\frac{1}{2}\omega^2(\rho_{\nu\alpha}+\rho_{\alpha\nu})-\frac{1}{2}(\gamma_{\nu\alpha}+\gamma_{\alpha\nu})\\
&\quad +\omega\sum_{i}^{2}\kappa_i\,\chi_{i\alpha\nu}+\omega\sum_{k}^{2}\kappa_k\,\chi_{k\nu\alpha}+\frac{1}{2}i\omega(\Omega_{\alpha\nu}-\Omega_{\nu\alpha})
\end{aligned}$$

¿Hace falta una generalización del problema de SL?

$$\frac{d}{dz}\left[\mathbf{B}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{P}(z)\cdot\mathbf{F}(z)\right]+\mathbf{Y}(z)\cdot\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz}+\mathbf{W}(z)\cdot\mathbf{F}(z) \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Conclusiones y comentarios

• El problema de Sturm-Liouville aparece de manera persistente en el amplio mundo de las excitaciones elementales en medios no homogéneos.

• Hay que hacer una pequeña generalización al problema planteado por Sturm y Liouville en 1837. Cobra relevancia la forma lineal $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{F}' + \mathbf{P}\mathbf{F}$.

• El operador de Sturm-Liouville es hermiteano para varias condiciones de contorno físicamente muy significativas. Excepción de lo anterior son los problemas de captura, escape y regularidad en el ∞.

• Para acometer diversos problemas de Sturm-Liouville se vienen introduciendo hace casi 70 años diversas matrices de transferencia de campos y de coeficientes, así como la función de Green. Varias matrices de transferencia son numéricamente inestables para grandes valores del autovalor y/o de los anchos de las capas. Algunas son inestables para anchos pequeños. Otras, como las de *scattering* e *híbrida* son estables en ambos límites.

¡GRACIAS!