Universidad Autónoma del Estado de Morelos
Facultad de Ciencias

Manual
Curso propedéutico

2014

Curso Propedéutico
Facultad de Ciencias, UAEM

Ana Baray Esparza
Juan José Catalán Ramírez
Dan Sidney Díaz Guerrero
Rogelio Valdez Delgado
Beatriz Villa Bahena

Introducción

El curso propedéutico de la Facultad de Ciencias de la UAEM, se imparte a los estudiantes candidatos a ingresar a la Facultad de Ciencias, a la carrera de Licenciatura en Ciencias, en sus cuatro áreas terminales como son Bioquímica y biología molecular, Ciencias computacionales, Física y Matemáticas. La duración del curso propedéutico es de alrededor de 4 semanas.

Los temas que se tratan en este curso son principalmente de matemáticas de nivel bachillerato. Este manual presentan los temas estudiados en el curso propedéutico, en el orden en que se enseñan a lo largo de las 4 semanas de duración del curso.

El primer capítulo, cubre material básico de álgebra, como son sistemas númericos, valor absoluto, leyes de los signos, operaciones algebraicas elementales, entre otros. El capítulo dos, estudia las operaciones básicas como suma, multiplicación, división de expresiones con literales, ya sea de monomios y polinomios. También se estudian los radicales y el concepto de racionalización.

El tercer capítulo, trata acerca de los productos notables básicos, y se presentan unos ejemplos geométricos de algunos de estos productos. También se da una introducción al teorema del binomio de Newton. En el capítulo cuatro se presenta, lo que se podría llamar la operación inversa de tomar el producto de dos expresiones, es decir, el concepto de factorización de expresiones algebraicas. Se pone especial enfásis en los distintos métodos de factorización que existen o en los más conocidos.

El quinto capítulo estudia las ecuaciones de primer grado, así como el planteamiento de problemas que se resuelven usando este tipo de ecuaciones. De la misma manera, en el capítulo seis se estudian las ecuaciones de segundo grado, la deducción de la fórmula general por el método de completar cuadrados y se hacen observaciones fundamentales acerca del discriminante de una ecuación cuadrática. Al final, tambien se estudian problemas que se resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado.

El capítulo siete trata acerca de los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, ya sea de sistemas de dos incógnitas o de tres incógnitas, incluyendo el método del determinante. Se presentan aplicaciones para la resolución de problemas. En el capítulo ocho se da un estudio breve de las desigualdades, así como de las inecuaciones y su relación con el valor absoluto.

El capítulo nueve trata acerca de funciones elementales básicas, como son la función logaritmo, las funciones exponenciales y las funciones trigonométricas, con especial enfásis en la resolución de ecuaciones con este tipo de funciones.

A lo largo del material de este manual, se presentan varios ejemplos resueltos de los temas vistos en cada capítulo o sección, y al final de casi todas las secciones de estas notas, una lista de ejercicios para el lector es presentada. Estos ejercicios pueden funcionar como parte de la tarea del curso.

Gran parte del material usado para la elaboración de este manual se recopilo de las clases teóricas presentadas por distintos profesores investigadores, que a lo largo de los últimos años han impartido el curso propedéutico.

Índice general

Capítulo 1

Números

Consideramos que el lector está familiarizado con el conjunto de números que se utilizan para contar. A este conjunto se le conoce como el conjunto de números naturales y se denota por $\mathbb{N}$, es decir,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este conjunto estamos acostumbrados a realizar dos operaciones, la suma y la multiplicación, entendiendo con esto que si sumamos o multiplicamos dos números del conjunto obtenemos otro número natural. A estas operaciones las conocemos como la suma (o adición) y la multiplicación (o producto). En algunos libros el 0 se considera también como un número natural, sin embargo, en este libro no, pero convenimos que 0 es tal que $n + 0 = n$, para todo número natural n.

Ahora, supongamos que deseamos resolver la ecuación $x + a = 0$, con $a \in \mathbb{N}$, es decir, encontrar una x para la cual la igualdad anterior se cumpla. Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, por lo cual necesitamos definir un conjunto de números que incluya al conjunto de números $\mathbb{N}$ y a sus negativos. Es decir, necesitamos extender el conjunto de los números $\mathbb{N}$ para que este tipo de ecuaciones tengan solución en el nuevo conjunto. A este conjunto lo llamamos el conjunto de los números enteros y lo denotamos por $\mathbb{Z}$, es decir,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este conjunto también hay dos operaciones, la suma y la multiplicación, que satisfacen las siguientes propiedades.

Propiedades 1.0.1 (a) *La suma y la multiplicación de números enteros son operaciones conmutativas. Esto es, si* $a,\ b \in \mathbb{Z}$*, entonces*

$$a + b = b + a \quad y \quad ab = ba.$$

(b) *La suma y el producto de números enteros son operaciones asociativas. Esto es, si $a,\ b$ y $c \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad y \quad (ab)c = a(bc).$$

(c) *Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la suma, el número 0. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a+0 = 0+a = a.$$

(d) *Existe en $\mathbb{Z}$ un elemento neutro para la multiplicación, el número 1. Es decir, si $a \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a1 = 1a = a.$$

(e) *Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe su inverso aditivo que se denota por $-a$. Esto es,*

$$a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

(f) *En $\mathbb{Z}$, el producto se distribuye con respecto a la suma. Es decir, si a, b y $c \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$a(b+c) = ab+ac.$$

Notemos que la existencia del inverso aditivo nos permite resolver cualquier ecuación del tipo mencionado, es decir, $x+a=b$, donde a y b son números enteros. Sin embargo, no existe necesariamente un número entero x que resuelva la ecuación $qx = p$, con p y q números enteros, por lo que nuevamente surge la necesidad de extender el conjunto de números. Consideramos ahora el conjunto de los números racionales, que denotamos como $\mathbb{Q}$, es decir,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \right\}.$$

En general, para trabajar con los números racionales $\frac{p}{q}$ pedimos que p y q no tengan factores primos comunes, es decir, que sean primos relativos, esto lo denotamos como $(p,q)=1$. En el conjunto de números racionales también existen las operaciones de suma y producto, las cuales cumplen las mismas propiedades que los números enteros. Además, en el producto existe otra propiedad: la existencia del inverso multiplicativo.

Propiedad 1.0.2 *Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, con $p \neq 0$ y $(p,q)=1$, entonces existe un único número, $\frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, llamado el inverso multiplicativo de $\frac{p}{q}$ tal que*

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1.$$

Con esta nueva propiedad tenemos garantía de poder resolver cualquier ecuación de la forma $qx = p$. Sin embargo, existen números que no podemos escribir como cociente de dos números enteros, por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x^2-2=0$, ésta no tiene solución en el conjunto de los números $\mathbb{Q}$. Las soluciones de la ecuación son $x = \pm\sqrt{2}$ y ahora mostremos que $\sqrt{2}$ no está en $\mathbb{Q}$.

Proposición 1.0.3 *El número $\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces lo podemos escribir como $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde p y q no tienen factores comunes. Elevando al cuadrado de ambos lados tenemos que $2 = \frac{p^2}{q^2}$, es decir, $2q^2 = p^2$. Esto quiere decir, que p^2 es un número par, pero entonces el mismo p es par. Pero si p es par, digamos de la forma $p = 2m$, entonces $2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Dividiendo entre 2 ambos lados de la ecuación tenemos que $q^2 = 2m^2$, esto es, q^2 es par y entonces q es también par. Así, p y q son pares, contradiciendo el hecho de que p y q no tienen factores comunes. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional.

1.1. Los números enteros y fraccionarios

Mucho antes de que los griegos (Eudoxio, Euclides, Apolonio, etc.) realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios y los egipcios conocían las fracciones.

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen, el peso, etc., llevó al hombre a introducir números fraccionarios.

Cuando tomamos una unidad cualquiera, por ejemplo, la vara, para medir una magnitud continua (magnitud escalar o lineal), puede ocurrir una de dos cosas, que la unidad esté contenida en un número entero de veces, o que no esté contenida en un número entero de veces. En el primer caso representamos el resultado de la medición con un número entero. En el segundo caso tendremos que fraccionar la unidad elegida en dos, en tres, en cuatro, o en tantas partes iguales como sea necesario; de este modo hallaremos una fracción de la unidad que esté contenida en la magnitud que tratamos de medir. El resultado de esta última medición lo expresaremos con un par de números enteros, distintos de cero, llamados respectivamente numerador y denominador. El denominador nos dará el número de partes en que hemos dividido la unidad, y el numerador el número de subunidades contenidas en la magnitud que acabamos de medir. Surgen de este modo los números fraccionarios. Algunos ejemplo de números fraccionarios son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{3}.$$

Podemos decir también que son números fraccionarios, los que nos permiten expresar el cociente de una división inexacta, o lo que es lo mismo, una división en la cual el dividendo no es múltiplo del divisor.

Un caso particular de números fraccionarios, son los números enteros, que podemos definir como aquellos que expresan el cociente de una división exacta. Como ejemplo de números enteros tenemos

$$1, 2, 3, 4, \ldots.$$

El 0 es un número entero. Los números -1, -2, -3, etc., también son números enteros, a estos se les conoce como **enteros negativos**.

1.2. Los números racionales e irracionales

Los **números racionales**, como vimos anteriormente, son aquellos que se pueden representar de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y q es distinto de cero, es decir, los números racionales son todos los números enteros y fraccionarios, tanto los positivos como los negativos, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{3}{1}$.

Existen números que no se pueden representar de la forma $\frac{p}{q}$, a estos se les llama **números irracionales**, por ejemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, e.

Es indudable que fueron los griegos quienes conocieron primero los números irracionales. Los historiadores de la matemática, están de acuerdo en atribuir a Pitágoras (550 A. C.) el descubrimiento de estos números, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Más tarde, Teodoro de Cirene (400 A. C.), matemático de la escuela pitagórica, demostró geométricamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc., son irracionales. Euclides (300 A. C.), estudió en el libro X de sus “Elementos”, ciertas magnitudes que al ser medidas no se encuentra ningún número entero ni fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números que se originan al medir tales magnitudes se llaman irracionales.

1.3. Los números reales

Se les llama **números reales** a los números descritos anteriormente (enteros, racionales e irracionales). Se pueden representar en forma decimal (como veremos a continuación), por ejemplo el número 1 lo podemos escribir como $1.000\ldots$, el -3 como $-3.000\ldots$, la fracción $\frac{1}{3}$ como $0.333\ldots$, $\sqrt{2}$ como $1.4142\ldots$, $\pi = 3.1415\ldots$.

1.3.1. Sistema decimal

El sistema decimal es un sistema posicional en el que cada dígito toma un valor de acuerdo a su posición con relación al punto decimal. Esto es, el dígito se multiplica por una potencia de 10. Para el dígito de las unidades, o sea, el dígito que está inmediatamente a la izquierda del punto decimal, lo tenemos que multiplicar por 10^n, con $n = 0$. El dígito de las decenas lo multiplicamos por $10^1 = 10$. El exponente aumenta de uno en uno conforme nos movemos a la izquierda y disminuye de uno en uno conforme nos movemos a la derecha. Por ejemplo,

$$87325.31 = 8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}.$$

En general, todo número real puede escribirse como una expansión decimal infinita de la siguiente manera

$$b_m \ldots b_1 b_0.a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

donde los b_i y los a_i están en $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Los puntos suspensivos de la derecha significan que después del punto decimal podemos tener una infinidad de dígitos, así el número

$b_m \ldots b_1 b_0 . a_1 a_2 a_3 \ldots$, representa al número real

$$b_m \cdot 10^m + \cdots + b_1 \cdot 10^1 + b_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots .$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0.3333\ldots, & \tfrac{3}{7} &= 0.428571428571\ldots, \\ \tfrac{1}{2} &= 0.50000\ldots, & \sqrt{2} &= 1.4142135\ldots. \end{aligned}$$

Con esta notación podemos también distinguir entre los números racionales y los irracionales. Los números racionales son aquellos para los cuales la expansión decimal es finita o bien infinita pero en algún momento se hace periódica, como por ejemplo en $\frac{34}{275} = 0.123636\ldots$, que se hace periódica de periodo 2 a partir del tercer dígito. En cambio, para los números irracionales, la expansión decimal es infinita, pero no sólo eso, sino que además nunca se hace periódica.

1.3.2. Números con signo

En Álgebra, cuando se estudian cantidades que pueden tomarse en **dos sentidos opuestos**, es decir, que son de condición o de modo de ser opuestos, se expresa el sentido, condición o modo de ser de las cantidades por medio de los signos $+$ y $-$, anteponiendo el signo $+$ a las cantidades tomadas en un sentido determinado (**cantidades positivas**) y anteponiendo el signo $-$ a las cantidades tomadas en sentido opuesto al anterior (**cantidades negativas**).

Así, por ejemplo, el tener, se designa con el signo $+$ y las deudas con el signo $-$. Para expresar que una persona tiene 100, diremos que tiene $+100$, y para expresar que debe 100, diremos que tiene -100.

Los grados sobre cero del termómetro se designan con el signo $+$ y los grados bajo cero con el signo $-$. Así, para indicar que el termómetro marca 10° sobre cero escribiremos $+10^\circ$ y para indicar que marca 8° bajo cero escribiremos -8°.

El camino recorrido a la derecha o hacia arriba de un punto dado, se designa con el signo $+$ y el camino recorrido a la izquierda o hacia abajo de ese mismo punto se representa con el signo $-$. Así, si hemos recorrido 200 m, a la derecha de un punto dado, diremos que hemos recorrido $+200$ m, y si recorremos 300 m a la izquierda del mismo punto, escribiremos -300 m.

El tiempo transcurrido después de Cristo, se considera positivo y el tiempo transcurrido antes de Cristo, negativo. Así, $+150$ años significa 150 años D.C. y -78 años significa 78 años A.C.

En un poste introducido en el suelo, representamos con el signo $+$ la porción que se halla del suelo hacia arriba y con el signo $-$ la porción que se halla del suelo hacia abajo. Así, para expresar que la longitud del poste que se halla del suelo hacia arriba mide 15 m, escribiremos $+15$ m, y si la porción introducida en el suelo es de 8 m, escribiremos -8 m.

La latitud norte se designa con el signo $+$ y la latitud sur con el signo $-$; la longitud este se considera positiva y la longitud oeste, negativa. Por lo tanto, un punto de la Tierra cuya situación geográfica sea $+45°$ de longitud y $-15°$ de latitud se hallará a $45°$ al este del primer meridiano y a $15°$ bajo el Ecuador.

1.3.3. Elección del sentido positivo

La elección de fijar el sentido positivo en cantidades que pueden tomarse en dos sentidos opuestos, es arbitraria, depende de nuestra voluntad, es decir, podemos elegir uno de los sentidos como sentido positivo, pero una vez fijado el sentido positivo, el **sentido opuesto** a éste será el negativo. Así, si tomamos como sentido positivo el camino recorrido a la derecha de un punto, el camino recorrido a la izquierda de ese punto será negativo, pero nada nos impide tomar como positivo el camino recorrido a la izquierda del punto y entonces el camino recorrido a la derecha del punto sería negativo.

1.3.4. El cero, los números positivos y negativos

El **cero** es la ausencia de cantidad. Los **números positivos** son todos los números reales mayores que cero, en algunas ocasiones estos números están precedidos por el signo $+$. Los **números negativos** son todos los números reales menores que cero, estos números se caracterizan por ser precedidos por el signo $-$.

Ejemplos de números positivos: 5, $+0.25$, $\frac{1}{7}$, π.

Ejemplos de números negativos: -2, $-0.333\ldots$, $-\frac{1}{5}$, $-\pi$.

1.4. Los símbolos de relación de orden

En los números reales está definida una **relación de orden**, como se enuncia a continuación.

Propiedades 1.4.1 *Si x, y son números reales, se cumple una y solamente una de las condiciones siguientes:*

(a) $x = y$,

(b) $x < y$,

(c) $x > y$.

El símbolo $=$ se lee **igual a**. Así, $x = y$ se lee "x igual a y". El símbolo $<$ se lee **menor que**. Así, $x < y$ se lee "x menor que y". El símbolo $>$ se lee **mayor que**. Luego, $x > y$ se lee "x mayor que y".

1.5. Valor absoluto

Definimos el **valor absoluto** de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Para k un número real no negativo, la identidad $|x| = k$ sólo la satisfacen los números $x = k$ y $x = -k$.
La desigualdad $|x| \leq k$ es equivalente a $-k \leq x \leq k$, lo cual podemos ver de la siguiente manera. Si $x \geq 0$, entonces $0 \leq x = |x| \leq k$. Por otro lado, si $x \leq 0$, entonces $-x = |x| \leq k$, de donde $x \geq -k$. Como consecuencia de lo anterior observemos que $x \leq |x|$. En la figura siguiente se muestran los valores de x que satisfacen la desigualdad, éstos son los que se encuentran entre $-k$ y k, incluyéndolos. Al conjunto $[-k, k] = \{x \in \mathbb{R} \mid -k \leq x \leq k\}$ le llamamos un **intervalo cerrado**, ya que contiene a k y $-k$. A $-k$ y k les llamamos los **puntos extremos** del intervalo.

Análogamente, la desigualdad $|x| \geq k$ es equivalente a $x \geq k$ o $-x \geq k$. En la figura siguiente los valores de x que satisfacen las desigualdades son los que se encuentran antes, o son iguales, a $-k$ o después, o son iguales, a k. El conjunto $(-k, k) = \{x \in \mathbb{R} \mid -k < x < k\}$ le llamamos un **intervalo abierto**, ya que no contiene a k y $-k$, es decir, un intervalo abierto es aquel que no contiene sus puntos extremos. Con esta definición vemos que el conjunto de las x que cumplen que $|x| \geq k$, son los valores de $x \notin (-k, k)$.

Observación 1.5.1 *Si x es un número real cualquiera, entonces la relación entre la raíz cuadrada y el valor absoluto está dada por $\sqrt{x^2} = |x|$, la identidad se sigue de que $|x|^2 = x^2$ y $|x| \geq 0$.*

Propiedades 1.5.2 *Si x y y son números reales, se cumple lo siguiente:*

(a) $|xy| = |x||y|$. *De aquí se sigue también que* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *si* $y \neq 0$.

(b) $|x + y| \leq |x| + |y|$, *donde la igualdad se da si y sólo si* $xy \geq 0$.

1.5.1. Ejercicios resueltos

1. Hallar el valor absoluto de los siguientes números:
a) 4, b) -7, c) 0.47, d) -0.3, e) $\frac{1}{2}$, f) $-\frac{5}{8}$.

Solución. Es directo ver que $|4| = 4$, $|7| = 7$, $|0.47| = 0.47$, $|-0.3| = 0.3$, $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\left|-\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}$.

2. Resuelva la ecuación $|2x - 4| = |x + 5|$.

Solución. Tenemos que

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{si} \quad x \geq 2, \\ -2x+4, & \text{si} \quad x < 2. \end{cases}$$

Además, tenemos que

$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & \text{si} \quad x \geq -5, \\ -x-5, & \text{si} \quad x < -5. \end{cases}$$

Si $x \geq 2$, entonces $2x-4 = x+5$, es decir, $x = 9$. Si $x < -5$, entonces $-2x+4 = -x-5$, de donde $x = 9$, lo cual es imposible ya que $x < -5$. El último caso que nos falta considerar es $-5 \leq x < 2$, entonces la ecuación que tenemos que resolver es $-2x+4 = x+5$, despejando x, tenemos que $x = -\frac{1}{3}$. Por lo tanto, los números que resuelven la ecuación son $x = 9$ y $x = -\frac{1}{3}$.

1.5.2. Ejercicios

Hallar el valor absoluto de los siguientes números:

a) 3.1416 **b)** $-27+14$

c) -1.4142 **d)** $2-\pi$.

Resuelva las ecuaciones siguientes.

e) $\left|\frac{2}{3}x+3\right|+4 = 10$ **f)** $|5x+3| = |3x+25|$.

En cada caso encuentra los números reales x que satisfacen la ecuación.

g) $|x-1|-|x+1| = 0$.

h) $|x-1||x+1| = 1$.

i) $|x-1|+|x+1| = 2$.

Muestra lo siguiente.

j) Si a y b son números reales cualesquiera, demuestra que

$$||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

1.6. Operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación y división)

Los **números** se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. En matemáticas, las **letras** se emplean usualmente para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas. Las **cantidades conocidas** usualmente se expresan por las primeras letras del alfabeto:

$$a, b, c, d, \ldots.$$

Las **cantidades desconocidas** usualmente se representan por las últimas letras del alfabeto:

$$w, x, y, z.$$

En Álgebra se pueden aplicar a cantidades las mismas operaciones que se usan en aritmética como son la suma, resta, multiplicación y división, que se indican con los signos siguientes:

El signo de la **suma** es $+$, que se lee **más**. Así $x + y$ se lee "x más y".

El signo de la **resta** es $-$, que se lee **menos**. Así $x - y$ se lee "x menos y".

El signo de la **multiplicación** es $\times$, que se lee **multiplicando por**. Así, $x \times y$ se lee "x multiplicando por y ". En lugar del signo $\times$, se puede usar **un punto** entre los factores y también se indica la multiplicación colocando los factores entre paréntesis. Así $x \cdot y = (x)(y) = x \times y$. Entre factores literales o entre un factor numérico y un literal, el signo de la multiplicación suele omitirse. Por ejemplo $x \times y \times z = xyz$, $5 \times x \times w = 5xw$.

El signo de la **división** se denota por $\div$, que se lee **dividido entre**. Así, $x \div y$ se lee "x dividido entre y ". También se indica la división separando el dividendo y el divisor por una raya horizontal. De esta manera, $\dfrac{x}{y}$ equivale a $x \div y$.

1.6.1. Los símbolos de agrupamiento

Los símbolos de agrupamiento son ( ), [ ], { }. Se utilizan para dar una jerarquía en el orden de las operaciones. Sea x un número real, convenimos que

$$x = (x) = [x] = \{x\}.$$

Así, $(x + y)z$ indica que el resultado de la suma de x y y debe multiplicarse por z; $[w - x]y$ indica que la diferencia entre w y x debe multiplicarse por y; $\{w + x\} \div \{y - z\}$ indica que la suma de w y x debe dividirse entre la diferencia de y y z.

Por ejemplo, si tenemos $5 + \{4 + [3 - (2 \times 5)]\}$ significa que primero debemos realizar la operación (2×5), así obtenemos $5 + \{4 + [3 - 10]\}$. Después realizamos la operación $[3 - 10]$, así obtenemos $5 + \{4 - 7\}$, y por último realizamos la operación $\{4 - 7\}$, por lo que

$$5 + \{4 + [3 - (2 \times 5)]\} = 5 - 3 = 2.$$

1.6.2. Ley de los signos

La **ley de los signos** es la siguiente:

$$\begin{array}{rcl}(+)(+) & = & + \\ (+)(-) & = & - \\ (-)(+) & = & - \\ (-)(-) & = & +.\end{array}$$

Cuando realizamos operaciones con los números reales es posible que obtengamos expresiones como $5+(+9)$, $-1-(-3)$, $2+(-5)$, $4-(+6)$. En estos casos aplicamos la ley de los signos de la siguiente manera

$$\begin{gathered}5+(+9)=5+9, \\ -1-(-3)=-1+3, \\ 2+(-5)=2-5, \\ 4-(+6)=4-6.\end{gathered}$$

1.6.3. Ejercicios resueltos

Calcule las operaciones indicadas.

1. $-(2+5)+(-3)=-(7)-3=-7-3=-10.$
2. $(-5)(15)+(2-7)=(-75)+(-5)=-75-5=-80.$
3. $\dfrac{\dfrac{(-2)}{5}}{\dfrac{-7}{8}}=\dfrac{(-2(8))}{(5(-7))}=\frac{-16}{-35}=\frac{16}{35}.$
4. $\dfrac{(-6+2)(-5)}{(1-3)(4)}=\dfrac{(-4)(-5)}{(-2)(4)}=\dfrac{20}{-8}=\dfrac{-5}{2}.$

1.6.4. Ejercicios

Calcule las operaciones indicadas.

a) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

b) $-2-7+8$

c) $5-\frac{1}{2}(2-3(\frac{1}{2}))$

d) $7+\frac{1}{3}(4-6(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}))$

e) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+(-2)+7(\dfrac{1}{4})$

f) $-3(1-2)+2\{-4[-2-3(1+1)]\}-\{-[-(1+1)]\}$

g) $2(\frac{1}{5}) + \{-[\frac{5}{7} + (\frac{3}{5} - \frac{5}{6}) + 2 - (-\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - (\frac{5}{6} + 4)] - (-\frac{1}{5} + \frac{1}{7})\}$

h) $5 + \{-(2+7) - [-4 + 21 - (2+7) + (-2-7) + (-2+7) - 2\}$

i) $-\{5 + \frac{1}{3} - 2(5 - \frac{1}{3}) + 3\{-[10 + \frac{1}{3} - 3(5 + \frac{1}{3} - 1)]\} - 3[-5 + 2(-1+5)]\}$

j) $\frac{3}{2} - 3(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}) + [-\{-(-3 + \frac{2}{5} - 2 - 3[\frac{3}{2} - \frac{2}{5} + 1]) + \frac{3}{2}\}]$.

1.6.5. Potencias de números

El **signo de elevar a una potencia** es **el exponente**, que es un número pequeño colocado arriba y a la derecha de una cantidad, el cual indica las veces que dicha cantidad, llamada **base** se toma como factor. Así, si n es un número entero mayor que cero tenemos que

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n-veces}},$$
$$x^{-n} = \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{\text{n-veces}}.$$

Si $n = 0$ tenemos que $x^0 = 1$. Cuando una letra **no tiene exponente**, su exponente es la **unidad**. Así, x equivale a x^1, xyz equivale a $x^1y^1z^1$.

1.6.6. Ejercicios resueltos

Calcula las potencias indicadas.

1. $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$. Recuerda que el número que aparece en el exponente es el número de veces que multiplicaras por si mismo el número que aparece en la base. No multiplicas estos dos números, esto quedará más claro con los siguientes ejemplos.
2. $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = 9(-3) = -27$.
3. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$.
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{9}{25}\right)\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{81}{625}$.

1.6.7. Ejercicios

Simplifica los siguientes números.

a) $4^{\frac{4+4}{4}} - 4 \cdot 4$

b) $\frac{2^4}{4^2} + \frac{2^{-1}}{-1^2}$

c) $3^2 - 3^{-2}$

d) $4^2 - 5^2$

e) $2^{10} \cdot 2^{20}$.

f) $(3^2)^3 - (3^{-2})^3$

g) $(4^2)^5 - (3^{-2})^4$

h) $(2^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)(2^2)$

i) $(10 \cdot 10^{15})^0$

j) $(3^3)\left(\frac{2}{3^2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)(9^2)$.

1.7. Productos de potencias de un mismo número

Las **leyes de los exponentes** se enuncian a continuación.

Propiedades 1.7.1 *Sean n, m números enteros, y sea x un número real, entonces*

(a) $x^n x^m = x^{n+m}$.

(b) $(x^n)^m = x^{nm}$.

(c) $(xy)^n = x^n y^n$.

(d) $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$*, para* $x \neq 0$ *y* $n > 0$.

1.7.1. Ejercicios resueltos

Resuelve las siguientes multiplicaciones.

1. $2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2^{1+3} = 2^4 = 16$.
2. $6 \cdot 6^4 = 6^{1+4} = 6^5 = 7,776$. Cuando las potencias resultán números muy grandes como en el caso anterior, la respuesta 6^5 es suficiente.
3. $(3.14^3)(3.14^5) = (3.14^{3+5}) = 3.14^8$.
4. $(7^{-2})(7^3) = 7^{-2+3} = 7^1 = 7$.
5. $(0.71^6)(0.71^{-3}) = 0.71^{6+(-3)} = 0.71^{6-3} = 0.71^3$.
6. $\frac{1}{32^4} \cdot 32^8 = 32^{-4} \cdot 32^8 = 32^{-4+8} = 32^4$.
7. $(6^9)(6^3)\left(\frac{1}{6^{13}}\right)(6^1) = (6^9)(6^3)(6^{-13})(6^1) = 6^{9+3+(-13)+1} = 6^{9+3-13+1} = 6^0 = 1$.

1.7.2. Ejercicios

Encuentra el valor de x en las siguientes igualdades.

a) $(1^{100})(1^0) = x$

b) $(6^5)(6^{-3})(3^4) = x$

c) $7^x = 2401$

d) $3^4 + 9^6 + 81^3 = x$

e) $1^x - 10^x = 0$

f) $(4^5)(64^8) = \frac{1}{4} + x$.

Capítulo 2

Operaciones con literales

2.1. Propiedades de los números reales con la suma y la multiplicación

De la misma manera que para números enteros, existen ciertas propiedades que se cumplen para la suma y multiplicación de números reales, las cuales enunciamos a continuación.

Propiedades 2.1.1 (a) **Asociatividad**. *Para todos x, y, z números reales, tenemos que*

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$x(yz) = (xy)z.$$

(b) **Conmutatividad**. *Para todos x, y números reales, tenemos que*

$$x + y = y + x,$$

$$xy = yx.$$

(c) **Existencia de elementos neutros**. *Existe un número y sólo un número, el 0 (cero), tal que $x + 0 = 0 + x = x$, para cualquier número real x.*

Existe un número y sólo un número, el 1 (uno), tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, para cualquier número real x.

(d) **Existencia de elementos inversos**. *Para todo x número real, existe el número real $-x$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

Para todo x número real, $x \neq 0$ (x distinto de cero), existe el número real x^{-1} tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

(e) **Leyes distributivas**. *Para todos x, y, z números reales, tenemos que*

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(x+y)z = xz + yz.$$

2.2. Términos y notación algebraica

Expresión algebraica. Es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas. Veamos los siguientes ejemplos:

$$a, \quad \frac{b}{c}, \quad x, \quad -4y, \quad \sqrt{ax+z}, \quad \frac{2x-3y}{x^3}, \quad \frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}.$$

Término. Es una expresión algebraica que consta de un sólo símbolo o de varios símbolos, sin estar separados entre sí por por alguno de los signos $+$ o $-$. Ejemplos de expresiones algebraicas con un término:

$$y, \quad xy, \quad -5ab, \quad \frac{x}{z^2}.$$

Ejemplos de expresiones algebraicas con más de un término:

$$x+y, \quad w-z, \quad a+b+c, \quad \frac{x}{y^4}+\frac{x^2}{y^5}-\frac{x^3}{y^6}.$$

Los elementos de un término son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal, y el grado.

El **signo**. Los **términos positivos** son aquellos que van precedidos del signo $+$, los **términos negativos** son aquellos que van precedidos del signo $-$.

Ejemplos de términos positivos:

$$+x, \ +9a, \ +5yz, \ +\frac{x}{z}.$$

Ejemplos de términos negativos:

$$-x, \ -3b, \ -6ay, \ -\frac{z}{w^4}.$$

Nota. Cuando un término no va precedido de ningún signo significa que es positivo. Así x es lo mismo que $+x$.

El **coeficiente**. En el producto de dos factores, cualquiera de los factores es llamado **coeficiente** del otro factor. Así, en el producto $3x$ el factor 3 es coeficiente del factor x e indica que el factor x se toma como sumando tres veces, es decir, $3x = x+x+x$; en el producto $5y$, el factor 5 es el coeficiente de y e indica que $5y = y+y+y+y+y$. Éstos son **coeficientes númericos**.

En el producto nx donde n es un entero mayor que cero, el factor n es coeficiente del factor x, e indica que x se toma como sumando n veces, o sea

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{\text{n-veces}}.$$

Si tenemos el producto $-nx$, el factor $-n$ es el coeficiente de x, e indica la resta de n veces el factor x, o sea

$$-nx = \underbrace{-x - x - \cdots - x}_{\text{n-veces}}.$$

Si $n = 0$ tenemos que $0x = 0$.

En el producto xy, el factor x es el coeficiente del factor y. Éste es un **coeficiente literal**. En el producto de más de dos factores, uno o varios de ellos son el coeficiente de los restantes. Así en el producto $wxyz$, w es el coeficiente de xyz, wx es el coeficiente de yz, wxy es el coeficiente de z.

Cuando una cantidad no tiene coeficiente numérico, su coeficiente es la **unidad**. Así, x equivale a $1x$, xyz equivale a $1xyz$.

La **parte literal** la constituyen las letras que haya en el término. Así, en $5xy$ la parte literal es xy; en $\frac{3x^3y^4}{2ab}$ la parte literal es $\frac{x^3y^4}{ab}$.

El **grado de un término** puede ser de dos clases: **absoluto y con relación a una letra**.

El **grado absoluto** de un término es la suma de los exponentes de sus factores literales. Así, el término $4x$ es de primer grado por que el exponente del factor literal x es 1; el término xy es de segundo grado por que la suma de los exponentes de sus factores literales es 2; el término x^2y es de tercer grado por que la suma de los exponentes de sus factores literales es 3; $5x^4y^3z^2$ es de noveno grado por que la suma de los exponentes de sus factores literales es 9.

El grado de un término **con relación a una letra** es el exponente de dicha letra. Así el término bx^3 es de primer grado con relación a b y de tercer grado con relación a x; $4x^2y^4$ es de segundo grado con relación a x y de cuarto grado con relación a y.

2.3. Clasificación de las expresiones algebraicas

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un sólo término, dos ejemplos son $3x$ y $-5yz^2$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica que consta de más de un término, por ejemplo $x^3 + 2x^2 + 5y + 1$.

Un **binomio** es un polinomio que consta de dos términos, por ejemplo $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{5mx^4}{6y^2}$.

Un **trinomio** es un polinomio que consta de tres términos, por ejemplo $5w^4 + 10z^3 + 5w^2$.

Para ordenar un polinomio se deben escribir sus términos de modo que los exponentes de una letra escogida, llamada **letra ordenatriz**, queden en orden descendente o ascendente. Así, ordenar el polinomio $-5x^3 + x^5 - 3x + x^4 - x^2 + 6$ en orden descendente con relación a x será escribir $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x + 6$.

Ordenar el polinomio $x^4y - 7x^2y^3 - 5x^5 + 6xy^4 + y^5 - x^3y^2$ en orden ascendente con relación a x será escribirlo en la forma $y^5 + 6xy^4 - 7x^2y^3 - x^3y^2 + x^4y - 5x^5$.

2.3.1. Suma de monomios y polinomios

La **suma o adición** es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas **(sumandos)** en una sola expresión algebraica **(suma)**. Así, la suma de a y b es $a + b$, por que esta última expresión es la reunión de las dos expresiones algebraicas dadas a y b.

Términos semejantes. Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen letras iguales con exponentes iguales.
Por ejemplo, los términos $2x$ y x son semejantes por que tienen la misma parte literal; los términos $4wz$ y $-6w^2z$ no son semejantes, por que aunque tienen iguales letras, éstas no tienen los mismos exponentes, ya que la w del primero término tiene de exponente 1 y la w del segundo tiene de exponente 2.

La **reducción de términos semejantes** es una operación que tiene por objeto convertir en un sólo término, dos o más términos semejantes. Para reducir dos o más términos semejantes se suman los coeficientes y a continuación de la suma, se escribe la parte literal.

Veamos los siguientes ejemplos, donde se reducen términos semejantes.

Ejemplo 2.3.1

1. $3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$.
2. $-m - 3m - 6m - 5m = (-1 - 3 - 6 - 5)m = -15m$. *Notemos que* $-m = -1m$.
3. $\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ab = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})ab = \frac{7}{6}ab$.
4. $-\frac{1}{3}x^2y - \frac{2}{3}x^2y = (-\frac{1}{3} - \frac{2}{3})x^2y = -\frac{3}{3}x^2y = -x^2y$.
5. $18x - 11x = (18 - 11)x = 7x$.
6. $-\frac{3}{7}a^2b + a^2b = (-\frac{3}{7} + 1)a^2b = \frac{4}{7}a^2b$.

2.3.2. Suma de monomios

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes, si los hay. Como ejemplos tenemos los siguientes.

Ejemplo 2.3.2

1. *Sumar* $5a$, $6b$ *y* $8c$.

   Los escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como $5a = +5a$, $6b = +6b$ *y* $8c = +8c$, *la suma será* $5a + 6b + 8c$.

   El orden de los sumandos no altera la suma. *Así,* $5a + 6b + 8c$ *es lo mismo que* $5a + 8c + 6b$ *o que* $6b + 8c + 5a$. *Esta es la* **ley conmutativa de la suma**.

2. *Sumar* $3a^2b$, $4ab^2$, a^2b, $7ab^2$ *y* $6b^3$.

   Se tiene que $3a^2b + 4ab^2 + a^2b + 7ab^2 + 6b^3$. *Reduciendo los términos semejantes, obtenemos que* $4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$.

3. *Sumar* $3a$ *y* $-2b$.

   Cuando algún sumando es **negativo** *suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma, así* $3a + (-2b) = 3a - 2b$.

4. *Sumar* $7a$, $-8b$, $-15a$, $9b$, $-4c$ *y* 8.

   Se tiene que $7a + (-8b) + (-15a) + 9b + (-4ac) + 8 = 7a - 8b - 15a + 9b - 4c + 8$. *Reduciendo términos semejantes, se llega a que* $-8a + b - 4c + 8$.

2.3.3. Suma de polinomios

1. Sumar $a - b$, $2a + 3b - c$ y $-4a + 5b$.

   La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis, así

   $$(a - b) + (2a + 3b - c) + (-4a + 5b).$$

   Ahora colocamos todos los términos de estos polinomios, unos a continuación de otros, con sus propios signos, y tendremos $a - b + 2a + 3b - c + -4a + 5b = -a + 7b - c$.

   Nota. En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de otros, de modo que los términos semejantes queden en una misma columna; se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

   $$\begin{array}{rrr} a & -b & \\ 2a & +3b & -c \\ -4a & +5b & \\ \hline -a & +7b & -c. \end{array}$$

2. Sumar $3m - 2n + 4$, $6n + 4p - 5$, $8n - 6$ y $m - n - 4p$.

   Se tiene que

$$\begin{array}{rrrr} 3m & -2n & & +4 \\ & 6n & +4p & -5 \\ & 8n & & -6 \\ m & -n & -4p & \\ \hline 4m & +11n & & -7. \end{array}$$

2.3.4. Ejercicios resueltos

1. Sumar $3a - 5b$ y $-6a + 3a$.

$$(3a - 5b) + (-6a + 3a) = (3a - 5b) + (-3a) = 3a - 5b - 3a = -5b.$$

2. Sumar $2ab - 6c + d$, $5c - 3d$ y $2d - 4ab$.

$$(2ab - 6c + d) + (5c - 3d) + (2d - 4ab)$$

$$= 2ab - 4ab - 6c + 5c + d - 3d + 2d = -2ab - c.$$

3. Restar $3a + 5b$ de $6a - 7b$.

$$(6a - 7b) - (3a + 5b) = 6a - 7b - 3a - 5b = 6a - 3a - 7b - 5b = 3a - 12b.$$

4. Restar a de ab.

$$ab - (a) = ab - a.$$

5. Restar $2a + 5b - 6c$ de $7a + 3b - 6c$.

$$\begin{aligned} (7a + 3b - 6c) - (2a + 5b - 6c) &= 7a + 3b - 6c - 2a - 5b + 6c \\ &= 7a - 2a + 3b - 5b - 6c + 6c \\ &= 5a - 2b. \end{aligned}$$

6. ¿Qué se debe sumar al primer polinomio para obtener el segundo?

   a) $x + 4y$, $3x - 6y$.

   Nota que dicho polinomio se obtendrá al restar el primero del segundo:

$$3x - 6y - (x + 4y) = 3x - 6y - x - 4y = 3x - x - 6y - 4y = 2x - 10y.$$

   b) $6x + 7y - 10$, $-8x - 13y - 6$.

$$\begin{aligned} (-8 - 3y - 6) - (6x + 7y - 10) &= -8x - 13y - 6 - 6x - 7y + 10 \\ &= -8x - 6x - 13y - 7y - 6 + 10 \\ &= -14x - 20y + 4. \end{aligned}$$

2.3.5. Ejercicios

Realiza las operaciones indicadas.

a) $2x^2y^3z + 3x^2y^3x$.

b) $2a^2bc^3 - 5a^2bc^3 + 3a^2bc^3$.

c) $3x^4 - 2x^4 + 7x^4$.

d) $2a - (-4a + b) - \{-[-4a + (b - a) - (-b + a)]\}$.

e) $(5ab - 3bc + 4cd) + 2bc + 2cd - 3cd) + (4bc - 2ab + 3cd) + (-3bc - 6cd - ad)$.

f) $x^2 - 3xy + y^2$+ $-2y^2 + 3xy - x^2$+ $x^2 + 3xy - y^2$.

g) $3x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 3(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1) + 3x^2 - 5x - 3$.

h) $x^2 + \frac{2}{3}xy$+ $-\frac{1}{6}xy + y^2$+ $-\frac{5}{6}xy + \frac{2}{3}y^2$.

i) $4x^2y^2 - 8xy^2 + 5x^2y + 3x^2 - 2y^2 + x^2y^2 - 6x^2y + 5y^2 - 5x^2y^2 + 4xy^2 - x^2y - 4x^2 - 2y^2 + 4xy^2 + 2x^2y + x^2$.

j) $4x^3y - 19xy^3 + y^4 - 6x^2y^2 - (-x^4 - 51xy^3 + 32x^2y^2 - 25x^3y)$.

2.4. Producto y potencias de monomios

La **multiplicación** es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto. El multiplicando y el multiplicador son llamados **factores** del producto.

El orden de los factores no altera el producto. Esta propiedad, demostrada en Aritmética, se cumple tambien en Álgebra. Así el producto xy puede escribirse yx; el producto xyz puede escribirse también yxz o zyx. Esta es la **ley conmutativa** de la multiplicación.

Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo. Así, en el producto $abcd$, tenemos

$$abcd = a \times (bcd) = (ab) \times (cd) = (abc) \times d.$$

Esta es la **ley asociativa** de la multiplicación.

Ley de los coeficientes. El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores. Así, $3a \times 4b = 12ab$. En efecto, como el orden de los factores no altera el producto, se tiene que

$$3a \times 4b = 3 \times 4 \times a \times b = 12ab.$$

2.4.1. Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes de éstos y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, colocando a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto estará dado por la ley de los signos.

Consideremos los siguientes ejemplos.

1. Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$.

   Se tiene que $2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3 \times a^{2+3} = 6a^5$. El signo del producto es $+$, ya que $+$ por $+$ da $+$.

2. Multiplicar $-xy^2$ por $-5mx^4y^3$.

   Se tiene que $(-xy^2)(-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5$. El signo del producto es $+$, porque $-$ por $-$ da $+$.

3. Multiplicar $3a^2b$ por $-4b^2x$.

   Se tiene que $(3a^2b)(-4b^2x) = 3 \times (-4) \times a^2b^{1+2}x = -12a^2b^3x$. El signo del producto es $-$, porque $+$ por $-$ da $-$.

4. Multiplicar $-ab^2$ por $4a^mb^nc^3$.

   Se tiene que $(-ab^2)(4a^mb^nc^3) = (-1) \times 4 \times a^{1+m}b^{2+n}c^3 = -4a^{1+m}b^{2+n}c^3$. El signo del producto es $-$, ya que $-$ por $+$ da $-$.

2.4.2. Potencias de monomios

Llamaremos potencia de un monomio al producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Diremos que un monomio está elevado a la n-ésima potencia si éste se ha tomado como factor n veces.

Por ejemplo la expresión $(5wx^3)^4$ indica que el monomio $5wx^3$ se ha elevado a la cuarta potencia. En este ejemplo la **base** es $5wx^3$ y el exponente es 4.

Para elevar a la n-ésima potencia un monomio primero se escribe el coeficiente de este elevado a la n-ésima potencia y despues se escriben las letras multiplicando el exponente de cada una de estas por n.

Veamos los siguientes ejemplos.

1. Elevar $2x^2$ a la tercera potencia.

$$(2x^2)^3 = 2^3x^{2\times 3} = 8x^6.$$

2. Elevar $5a^{10}b^6$ a la cuarta potencia.

$$(5a^{10}b^6)^4 = 5^4a^{10\times4}b^{6\times4} = 5^4a^{40}b^{24}.$$

3. Hallar $(32x^{25}y^{50})^2$.

$$(32x^{25}y^{50})^2 = 32^2x^{25\times2}y^{50\times2} = (2^5)^2x^{50}y^{100} = 2^{10}x^{50}y^{100}.$$

2.4.3. Ejercicios resueltos

Calcule los productos indicados.

1. $(7b)(6a) = 42ab$.
2. $(3b)^3 = 27b^9$.
3. $(\frac{a}{6})^4 = \frac{a^4}{6^4}$.
4. $(\frac{3}{z})^3 = \frac{27}{z^3}$.
5. $(\frac{1}{b})(b^2) = \frac{b^2}{b} = b$.
6. $(\frac{4b}{3})(\frac{6a}{2}) = \frac{24ab}{6} = 4ab$.
7. $(5a^2b)^3 = 125a^6b^3$.

2.4.4. Ejercicios

Calcule los productos indicados.

a) $(2x^3)(5x^3)$ **b)** $(a+b-c)\,(a-b+c)$

c) $(12x3)(4x)$ **d)** $(4a^{-2})(a^{-\frac{1}{2}})$

e) $(-2x^3)(-5x)(-3x^2)$ **f)** $(18x^3y^2z^5)(6x^3yz^2)$

g) $(-3x^2)^3$ **h)** $(\frac{2}{3}x^3)^2$

i) $(\frac{7}{9}x^5y^2z)^3$ **j)** $(5x^7y^9z^a)^3$.

2.5. Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, y al final se reducen los terminos semejantes.

Ejemplo 2.5.1 *Multiplicar* $4x-3y$ *por* $-2y+5x$.

$$\begin{aligned}(-2y+5x)(4x-3y) &= -2y(4x-3y)+5x(4x-3y)\\ &= -2y(4x)-2y(-3y)+5x(4x)+5x(-3y)\\ &= -8xy+6y^2+20x^2-15xy\\ &= 20x^2-23xy+6y^2.\end{aligned}$$

Tambień podemos escribir la multiplicación en forma vertical,

$$\begin{array}{cccc} 4x & -3y & & \\ 5x & -2y & & \\ \hline 4x(5x) & -3y(5x) & & \\ & -4x(2y) & +3y(2y). & \end{array}$$

Reducimos los términos semejantes, para obtener

$$\begin{array}{ccc} 4x & -3y & \\ 5x & -2y & \\ \hline 20x^2 & -15xy & \\ & -8xy & +6y^2 \\ \hline 20x^2 & -23xy & +6y^2. \end{array}$$

2.5.1. Ejercicios resueltos

Realice las siguientes multiplicaciones.

1. x^2-x+4 por $-2x^2$.

Solución.

$$(x^2-x+4)(-2x^2) = -2x^4+2x^3-8x^2.$$

2. Multiplicar $\frac{3x-2}{4}-\frac{2x-1}{6}$ por 12.

Solución.

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x-2}{4}-\frac{2x-1}{6}\right)(12) &= 12\left(\frac{3x-2}{4}\right)-12\left(\frac{2x-1}{6}\right)\\ &= \frac{36x-24}{4}-\frac{24x-12}{6}\\ &= 9x-6-4x+2\\ &= 9x-4x-6+2\\ &= 5x-4.\end{aligned}$$

3. $3x(2x-1)-x(x-3)$.

Solución.

$$3x(2x-1)-x(x-3)=6x^2-3x-x^2+3x=6x^2-x^2-3x+3x=5x^2.$$

4. $-2ab^3(5x-6-3b^2)$.

Solución.

$$-2ab^3(5x-6-3b^2)=-10ab^3x+12ab^3+6ab^5.$$

2.5.2. Ejercicios

Calcula los siguientes productos de polinomios.

a) $(4x^3-5x^2+2x+1)(3x-6)$.

b) $(a+b-c)\,(a-b+c)$.

c) $(-3x^2y^3+4-7x^2y^2-6x^3y^3)(5x^4y+8x-2x^3y-10)$.

d) $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b)\,(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b)$.

e) $(5a-46a^4)(2a^2-3a^3+4a)$.

f) $(\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}a^2)(\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{2}{3}a^2)$.

g) $(3x^5-4x^4+8x^3)(2x-8)$.

h) $(a^x-a^{x+1}+a^{x+2})\,(a+1)$.

i) $(m^3-m^2+m-2)(am+a)$.

j) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{4}{3}}b-a^{-2}b^{\frac{3}{2}})(3a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}+1+a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})$.

2.6. División de monomios

La **división** es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente). De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo. Así, la operación de dividir $6a^2$ entre $3a$, que se indica por $6a^2 \div 3a$ o $\frac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ se obtenga $6a^2$. Esa cantidad (**cociente**) es $2a$.

2.6.1. Ley de los signos en la división

La **ley de los signos** en la división es la siguiente:

$$\begin{aligned}(+) \div (+) &= +\\(+) \div (-) &= -\\(-) \div (+) &= -\\(-) \div (-) &= +.\end{aligned}$$

Ejemplos. Calcula las divisiones indicadas.

1. $(+ab) \div (+a) = \dfrac{+ab}{+a} = +b.$

2. $(-ab) \div (-a) = \dfrac{-ab}{-a} = +b.$

3. $(+ab) \div (-a) = \dfrac{+ab}{-a} = -b.$

4. $(-ab) \div (+a) = \dfrac{-ab}{+a} = -b.$

5. $a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2.$

6. $b^4 \div b^2 = \frac{b^4}{b^2} = b^{4-2} = b^2.$

2.6.2. División de monomios

Para dividir dos monomios se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene el dividendo y el exponente que tiene el divisor. El signo lo da la ley de los signos.

Ejemplo 2.6.1 *Dividir* $4a^3b^2$ *entre* $-2ab$.

$$4a^3b^2 \div -2ab = \frac{4a^3b^2}{-2ab} = -2a^2b,$$

ya que $(-2ab)(-2a^2b) = 4a^3b^2$.

2.6.3. Ejercicios resueltos

Simplifica las siguientes expresiones

1. $\dfrac{a^6}{a^2}$.

$$\frac{a^6}{a^2} = a^{6-2} = a^4.$$

2. $\dfrac{c^3}{c^{-3}}$.

$$\frac{c^3}{c^{-3}} = c^{-3-(-3)} = c^6.$$

3. $\dfrac{(x+2)^4}{(x+2)^6}$.

$$\frac{(x+2)^4}{(x+2)^6} = (x+2)^{4-6} = (x+2)^{-2} = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

4. $\dfrac{-30a^3b^2}{12a^2b^4c}$.

$$\frac{-30a^3b^2}{12a^2b^4c} = \frac{-5a^{3-2}b^{2-4}}{2c} = \frac{-5ab^{-2}}{2c} = \frac{-5a}{2b^2c}.$$

5. $\dfrac{(-3x)^4}{x^2}$.

$$\frac{(-3x)^4}{x^2} = \frac{81x^4}{x^2} = 81x^{4-2} = 81x^2.$$

2.6.4. Ejercicios

Dividir la expresiones indicadas.

a) $12x^3$ entre $4x$

b) $x^{-4}y^{-5}$ entre x^2y^{-1}

c) $36x^3y^7z^4$ entre $12x^2y^2$

d) $\frac{1}{a^3b}$ entre $a^{-\frac{1}{4}}b^{-3}$

e) $24x^5y^4 + 18x^4y^5 - 48x^10y^3$ entre $6x^2y^3$

f) $10x^{\frac{2}{7}}$ entre $2x^{-\frac{1}{7}}$

g) $6x^3yz$ entre $2x^2y$

h) $6x^{-3}y^{-2}$ entre $3x^{-4}y^{-3}$

i) $36a^{x+2}b^{x-1}$ entre $3a^xb$

j) $x^{\frac{4}{5}}y^{-\frac{4}{5}}$ entre $x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{4}{5}}$.

2.7. Simplificación de expresiones fraccionarias

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas. Así, $\frac{a}{b}$ es una fracción algebraica porque es el cociente indicado de la expresión a (dividendo) entre la expresión b (divisor). El dividendo a se llama **numerador** de la fracción algebraica, y el divisor b, **denominador**. El numerador y el denominador son los términos de la fracción.

Una expresión algebraica **entera** es la que no tiene denominador literal. Así $\frac{x+y}{1}$ es una expresión algebraica entera. Una expresión entera puede considerarse como una fracción de denominador 1.

Una expresión algebraica **mixta** es la que consta de parte entera y parte fraccionaria. Así, $a + \frac{b}{c}$ y $x - \frac{3}{x-a}$ son expresiones mixtas.

2.7.1. Principios fundamentales de las fracciones

Los siguientes principios demostrados en Aritmética se aplican igualmente a las fracciones algebraicas.

Propiedades 2.7.1 (a) *Si el numerador de una fracción algebraica se multiplica o divide por una cantidad, la fracción queda multiplicada en el primer caso y dividida en el segundo por dicha cantidad.*

(b) *Si el denominador de una fracción algebraica se multiplica o divide por una cantidad, la fracción queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por dicha cantidad.*

(c) *Si el numerador y el denominador de una fracción algebraica se multiplican o dividen por una misma cantidad, la fracción no se altera.*

2.7.2. Simplificación de fracciones

Reducir una fracción algebraica es cambiar su forma sin cambiar su valor.

Simplificar una fracción algebraica es convertirla en una fracción equivalente cuyos términos sean primos entre sí.

Cuando los términos de una fracción son primos entre sí, la fracción es **irreducible** y entonces la fracción está reducida a su más simple expresión o a su mínima expresión.

Para **simplificar fracciones cuyos términos sean monomios** se dividen el numerador y el denominador por sus factores comunes hasta que sean primos entre sí.

Ejemplo 2.7.2 *Simplificar* $\dfrac{4a^2b^5}{6a^3b^3m}$.

$$\frac{4a^2b^5}{6a^3b^3m} = \frac{2 \times 2 \times a^{2-3}b^{5-3}}{2 \times 3 \times m} = \frac{2b^2}{3am}.$$

Para **simplificar fracciones cuyos términos sean polinomios** se descomponen en factores los polinomios todo lo posible y se suprimen los factores comunes al numerador y el denominador.

2.7.3. Ejercicios resueltos

Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

1. $\dfrac{275b^3a^2}{55b^{-4}} = \dfrac{55(5)b^{3-(-4)}a^2}{55} = 5b^7a^2.$
2. $\dfrac{(x+2)^2(x+3)}{(x+3)-1} = \dfrac{(x+2)^2(x+3)}{x+3-1} = \dfrac{(x+2)^2(x+3)}{x+2} = (x+2)(x+3).$
3. $\dfrac{(2a-b)-(3a+2b)}{(a+3b)c} = \dfrac{2a-3a-b-2b}{(a+3b)c} = \dfrac{-a-3b}{(a+3b)c} = \dfrac{-(a+3b)}{(a+3b)c} = \dfrac{-1}{c}.$
4. $\dfrac{(x^2-2x-3)y^2}{(x+1)y} = \dfrac{(x+1)(x+3)y^2}{(x+1)y} = (x+3)y.$

2.7.4. Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} \div \dfrac{a+b}{a}$

b) $\dfrac{81y^2}{7p^3} \div \left(-\dfrac{18y^4}{35p^2}\right)$

c) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$

d) $\dfrac{3m^5n}{7} \div 14m^3n^2$

e) $\dfrac{x^2-6x+9}{5x-15}$

f) $15a^3b^4 \div \dfrac{35a^4b^2}{2}$

g) $\dfrac{6x-18}{8x+16}$

h) $-\dfrac{45m^3}{28n^3} \div \dfrac{27m^4}{49n^5}$

i) $\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3+4x^2+4x}$

j) $\dfrac{x-2}{3y^2} \div \dfrac{3x-6}{y^3}.$

2.8. Suma y resta de expresiones fraccionarias

Regla general para sumar o restar fracciones.

1. Se simplifican las fracciones dadas si es posible.
2. Se reducen las fracciones dadas al mínimo común denominado, si son de distinto denominador.
3. Se efectúan las multiplicaciones indicadas.
4. Se suman o restan los numeradores de las fracciones que resulten y se parte esta suma por el denominador común.
5. Se reducen términos semejantes en el numerador.
6. Se simplifica la fracción que resulte, si es posible.

2.8.1. Ejercicios resueltos

Realiza las siguientes operaciones y simplifica.

1. $\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2x+3}{x+2}=\dfrac{x+3+2x+3}{x+2}=\dfrac{3x+6}{x+2}=\dfrac{3(x+2)}{x+2}=3.$
2. $\dfrac{5x+1}{x+1}-\dfrac{2x-4}{x+1}=\dfrac{5x+1-2x+4}{x+1}=\dfrac{3x+5}{x+1}$
3. $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{x(x-3)+2(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{x^2-3x+2x+4}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{x^2-x+4}{(x+2)(x-3)}.$
4. $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{x+3(x-2)}{x^2-4}=\dfrac{x+3x-6}{x^2-4}=\dfrac{4x-6}{x^2-4}.$
5. $$\begin{aligned}\frac{12x-4}{x^2-4x+4}-\frac{2}{x-2} &= \frac{12x-4}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}\\ &= \frac{12x-4-2(x-2)}{(x-2)^2}\\ &= \frac{12x-4-2x+4}{(x-2)^2}=\frac{10x}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

2.8.2. Ejercicios

Realiza las operaciones y simplifica.

a) $\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2x+3}{x+2}$

b) $\dfrac{p}{p-2}-\dfrac{5}{2-p}+\dfrac{2p}{p-2}$

c) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{2}{x-3}$

d) $\dfrac{3c+2}{(c-1)^2}-\dfrac{4c-2}{(1-c)^2}+\dfrac{2c+5}{(1-c)^2}$

e) $\dfrac{12x-4}{x^2-4x+4}-\dfrac{2}{x-2}$

f) $\dfrac{2x}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(1-x)^3}-\dfrac{x}{(1-x)}$

g) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}$

h) $\dfrac{a+b}{a^2}+\dfrac{a-b}{ab}$

i) $\dfrac{x^2-x}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$

j) $\dfrac{x-y}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{2x}{x^2-y^2}+\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$.

2.9. Potencias fraccionarias y simplificación de radicales

La **raíz** de una expresión algebraica elevada a una potencia reproduce la expresión dada. El **signo de la raíz** es $\sqrt{\ }$, llamado signo radical. Debajo de este signo se coloca la cantidad a la cual se extrae la raíz llamada por eso **cantidad subradical**.

El signo $\sqrt{\ }$ lleva un índice que indica la potencia a que hay que elevar la raíz para que reprodusca la cantidad subradical. Por convención el índice 2 se suprime y cuando el signo $\sqrt{\ }$ no lleva índice se entiende que el índice es 2.

Así, $\sqrt{a^4}$ significa que una cantidad elevada al **cuadrado** reproduce la cantidad subradical a^4, esta raices son a^2 y $-a^2$, ya que $(a^2)^2=a^4$ y $(-a^2)^2=a^4$.

$\sqrt[3]{8x^3}$ significa una cantidad que elevada al **cubo** reproduce la cantidad subradical $8x^3$; esta raíz es $2x$ por que $(2x)^3=8x^3$.

$\sqrt[5]{-32a^5}$ significa que elevada a la **quinta potencia** reproduce la cantidad subradical $-32a^5$; esta raíz es $-2a$ por que $(-2a)^5=-32a^5$.

Una **expresión radical** es toda raíz indicada de un número o de una expresión algebraica. Así, $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{9a^3}$, $\sqrt[4]{16a^3}$ son expresiones radicales.

Si la raíz indicada es exacta, la expresión es **racional**; si no es exacta es **irracional**. Las expresiones irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3a^2}$ son las que comúnmente se llaman radicales.

El **grado** de un radical lo indica su índice. Así, $\sqrt{2a}$ es un radical de segundo grado; $\sqrt[3]{5a^2}$ es un radical de tercer grado; $\sqrt[4]{3x}$ es un radical de cuarto grado.

Se extiende la idea de exponente, a los números de la forma $\frac{m}{n}$ donde m y n son números enteros.

Para extraer una raíz a una potencia se divide el exponente de la potencia por el índice de la raíz. Por lo que obtenemos las **leyes de los radicales**.

Propiedades 2.9.1 (a) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

(b) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

2.9.1. Raíz de un monomio

Para extraer una raíz de un monomio se procede como sigue.

1. Se extrae la raíz del coeficiente y se divide el exponente de cada letra por el índice de la raíz.

2. Si el índice del radical es impar, la raíz tiene el mismo signo que la cantidad subradical, y si el índice es par y la cantidad subradical positiva, la raíz tiene el doble signo $\pm$.

Ejemplo 2.9.2 1. *Hallar la raíz cuadrada de* $9a^2b^4$.

$$\sqrt{9a^2b^4} = \pm 3ab^2.$$

2. *Hallar la raíz cuadrada de* $-8a^3x^6y^9$.

$$\sqrt[3]{-8a^3x^6y^9} = -2ax^2y^3.$$

2.9.2. Ejercicios resueltos

1. Simplificar la siguiente expresión.

$$\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8 = \left(\sqrt{\sqrt{k^{1/2}}}\right)^8 = \left(\sqrt{k^{1/4}}\right)^8 = (k^{1/8})^8 = k^{8/8} = k^1 = k.$$

2. Multiplicar $3x^2$ y $2x^{1/2}y$.

$$3x^2(2x^{1/2}y) = (3)(2)(x^2)(x^{1/2}) = 6x^{2+\frac{1}{2}}y = 6x^{\frac{5}{2}}y.$$

3. Multiplicar $2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ y $3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{2}}$.

$$(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{2}}) = (2)(3)(x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})(y^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}) = 6x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = 6xy^3.$$

4. Simplificar $(x^4y^5)^{\frac{1}{2}}$.

$$(x^4y^5)^{\frac{1}{2}} = x^{4(\frac{1}{2})}y^{5(\frac{1}{2})} = x^2y^{\frac{5}{2}}.$$

2.9.3. Ejercicios

Simplificar las expresiones dadas.

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[9]{64}$

c) $\dfrac{\sqrt[2]{ab}}{\sqrt[3]{ab}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt[2]{4ab}}{\sqrt[4]{2ab}}$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt[2]{ab^3c^3}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$

g) $\sqrt[3]{\dfrac{-125x^9}{216m^{12}}}$ **h)** $\sqrt[9]{\dfrac{a^{18}}{b^9c^{27}}}$

i) $\sqrt[10]{\dfrac{x^{20}}{1024y^{30}}}$ **j)** $\sqrt[7]{\dfrac{128}{x^{14}}}$.

2.10. Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción es convertir una fracción cuyo denominador sea irracional en una fracción equivalente cuyo denominador sea racional. Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del denominador. Si el denominador de un cociente contiene un factor de la forma $\sqrt[n]{a^k}$, con $k < n$ y $a > 0$, entonces se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-k}}$ para obtener en el denominador

$$\sqrt[n]{a^k}\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^{k+n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Este proceso se llama **racionalización del denominador**.

Ejemplo 2.10.1 *Racionalizar el denominador de* $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Observe que

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Expresiones conjugadas. Dos expresiones que contienen radicales de segundo grado como $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ o $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$, que difieren solamente en el signo que une sus términos, se dice que son **conjugadas**. Así, la conjugada de $3\sqrt{2} - \sqrt{5}$ es $3\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

El producto de dos expresiones conjugadas es racional. Así,

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{5})(3\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = 18 - 5 = 13.$$

Para racionalizar el denominador de una fracción cuando el denominador es un binomio que contiene radicales de segundo grado, **se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador y se simplifica el resultado**.

Ejemplo 2.10.2 *Racionalizar el denominador de* $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}\frac{4-\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}} &= \frac{(4-\sqrt{2})}{(2+5\sqrt{2})}\frac{(2-5\sqrt{2})}{(2-5\sqrt{2})} = \frac{8-22\sqrt{2}+10}{2^2-(5\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{18-22\sqrt{2}}{-46} = \frac{11\sqrt{2}-9}{23}.\end{aligned}$$

Para **racionalizar el denominador** de una expresión que contiene tres radicales de segundo grado hay que realizar dos pasos como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.10.3 *Racionalizar el denominador de*

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}}.$$

Primero se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador, considerado como un binomio $(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{6}$*, es decir,* $(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{6}$*,*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6}} &= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{6})}\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6})}\\ &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}\\ &= \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3}{1+2\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Ahora, nuevamente se multiplican ambos términos de la fracción por la conjugada del denominador, es decir, $1-2\sqrt{10}$*. Así, se obtiene*

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3}{1+2\sqrt{10}} &= \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{30}-3)}{(1+2\sqrt{10})}\frac{1-2\sqrt{10}}{1-2\sqrt{10}}\\ &= \frac{22\sqrt{3}-5\sqrt{30}-3+6\sqrt{10}}{1-40}\\ &= \frac{3-6\sqrt{10}+5\sqrt{30}-22\sqrt{3}}{39}.\end{aligned}$$

2.10.1. Ejercicios resueltos

1. Racionaliza el denominador de las siguientes fracciones:

$$a)\ \frac{5}{\sqrt{2}};\quad b)\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\quad c)\ \frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};\quad d)\ \frac{2}{3+\sqrt{7}};\quad e)\ \frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}.$$

Solución.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$.

c) $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$.

d) $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{2(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \dfrac{2(3+\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \dfrac{2(3+\sqrt{7})}{9-7} = \dfrac{2(3+\sqrt{7})}{2} = 3+\sqrt{7}$.

e)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} \\
&= \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2} \\
&= \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{x+1-(x-1)} = \frac{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{2}.
\end{aligned}$$

2.10.2. Ejercicios

Simplificar los siguientes radicales.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{-3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ **d)** $\dfrac{4+\sqrt{3}}{5-4\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} \quad \left(x = \dfrac{2ab}{1+b^2}\right)$

i) $\dfrac{x^4-x-1}{x(x^2+\sqrt{x+1})}$ **j)** $\dfrac{4+\sqrt{3}}{5-4\sqrt{3}}$.

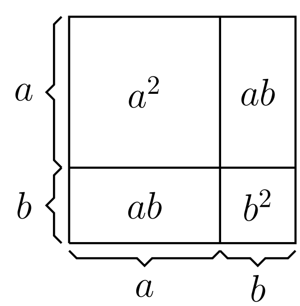
Capítulo 3

Productos notables

3.1. Ejemplos importantes

Se llaman **productos notables** a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

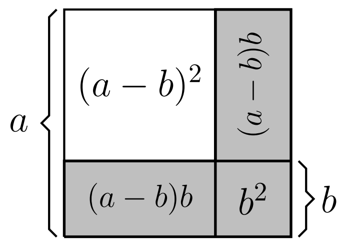
Como motivación veamos los siguientes ejemplos. El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado. Si sus lados miden $a+b$ entonces el área es $(a+b)^2$, pero el área de este cuadrado la podemos dividir en cuatro rectángulos como se muestra en la figura.



Luego, la suma de las áreas de los cuatro rectángulos será igual al área del cuadrado, es decir,

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{3.1}$$

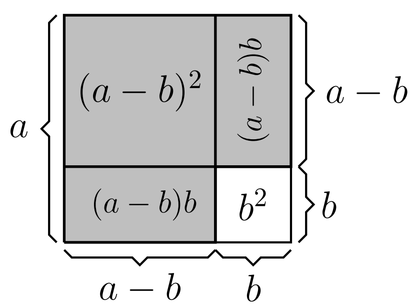
Veamos ahora cómo obtener geométricamente el cuadrado de la diferencia $a-b$, donde $b \leq a$. El problema es ahora encontrar el área de un cuadrado de lado $a-b$.



En la figura observamos que el área de un cuadrado de lado a es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados $(a-b)$ y b, más el área de dos rectángulos iguales de lados b y $(a-b)$. Esto es, $a^2 = (a-b)^2 + b^2 + (a-b)b + b(a-b)$, de donde

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \tag{3.2}$$

Para encontrar el área de la parte sombreada de la siguiente figura,



observamos que la suma de las áreas de los rectángulos que la forman es $a(a-b) + b(a-b)$ y si factorizamos esta suma tenemos que

$$a(a-b) + b(a-b) = (a+b)(a-b), \tag{3.3}$$

pero es equivalente al área del cuadrado grande menos el área del cuadrado chico, es decir,

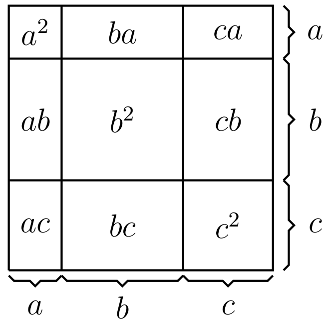
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2. \tag{3.4}$$

Otro producto notable, pero ahora de tres variables, está dado por

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \tag{3.5}$$

La representación geométrica de este producto está dada por la igualdad entre el área del cuadrado con lados de longitud $a+b+c$ y la suma de las áreas de los nueve rectángulos en que se ha dividido el cuadrado, esto es,

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+ab+ac+ba+bc+ca+cb = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$



3.2. Productos notables

Una cantidad es un **cuadrado perfecto** cuando es el cuadrado de otra cantidad, es decir, cuando es el producto de dos factores iguales. Por ejemplo, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $2a$: $(2a)^2 = 2a \times 2a = 4a^2$. Además notemos que $2a$ es la raíz cuadrada de $4a^2$.

Cuadrado de la suma de dos cantidades.
Elevar al cuadrado $a + b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo, es decir,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2,\end{aligned}$$

luego, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el doble de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda.

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades.
Elevar al cuadrado $a - b$ equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma como a continuación

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ba + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2,\end{aligned}$$

luego, el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el doble de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades.
Sean a y b dos cantidades, tenemos el siguiente producto

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - b^2,\end{aligned}$$

luego, la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.

Producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$.
Tenemos el siguiente producto

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+bx+ax+ab\\ &= x^2+(a+b)x+ab.\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que el producto de dos binomios que tienen un término en común cumplen las siguientes reglas.

1. El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios.

2. El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios.

3. El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

Cubo de un binomio.
Elevemos $a+b$ al cubo,

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\end{aligned}$$

luego, el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

Cubo de la diferencia de dos cantidades.
Elevemos $a-b$ al cubo.

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)(a-b)\\ &= (a-b)(a-b)^2\\ &= (a-b)(a^2-2ab+b^2)\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\end{aligned}$$

luego, el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad menos el triple del cuadrado de la primera por la segunda, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.

3.2.1. Ejercicios resueltos

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(x+5)^2$.

Solución.

$$(x+5)^2 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$$

2. $\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2$.

Solución.

$$\begin{aligned}\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)^2 &= (x^2)^2 - 2(x^2)\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \\ &= x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

3. $(2x-3)^3$.

Solución.

$$\begin{aligned}(2x-3)^3 &= (2x)^3 - 3(2x)^2(3) + 3(2x)(3)^2 - 3^3 \\ &= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27.\end{aligned}$$

4. $(2x+5)^3$.

Solución.

$$\begin{aligned}(2x+5)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(5) + 3(2x)(5)^2 + 5^3 \\ &= 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125.\end{aligned}$$

3.2.2. Ejercicios

Desarrollar los siguientes productos.

a) $(x+4)^2$

b) $(x^{10} + 10y^{12})^2$

c) $(ab^4 - c)(ab^4 + c)$

d) $(x^{a+1} - 3x^{a-2})^2$

e) $(7a^{5n} + \frac{b^{6x}}{9})(7a^{5n} - \frac{b^{6x}}{9})$

f) $(xy^2 - 9)(xy^2 + 12)$

g) $(2x-3)^3$

h) $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)$

i) $(2x^n - \frac{1}{3})(2x^n + \frac{1}{3})$

j) $(2a - b - c)(2a - b + c)$.

3.3. Cocientes notables

Se llaman cocientes notables a ciertos cocientes que obedecen a reglas fijas y que pueden ser escritos por simple inspección.

3.3.1. Cociente de la diferencia de cuadrados de dos números entre la suma o resta de los números

En este primer caso de cocientes notables, se tiene que si se divide la diferencia de cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades se obtiene la diferencia de la cantidades

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$$

De la misma manera, la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la suma de las cantidades

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.$$

Ejemplo 3.3.1 *Dividir* $9x^2-y^2$ *entre* $3x+y$.

Es claro que

$$\frac{9x^2-y^2}{3x+y}=3x-y.$$

Ejemplo 3.3.2 *Dividir* $(a+b)^2-c^2$ *entre* $(a+b)+c$.

Se tiene que

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)+c}=a+b-c.$$

3.3.2. Cociente de la suma o diferencia de los cubos de dos números entre la suma o resta de los números

Los dos casos considerados aquí son los siguientes cocientes:

$$\frac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2,$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$$

Ejemplo 3.3.3 *Dividir* $8x^3 + y^3$ *entre* $2x + y$.

En este caso tenemos que

$$\frac{8x^3 + y^3}{2x + y} = (2x)^2 - 2x(y) + y^2 = 4x^2 - 2xy + y^2.$$

Ejemplo 3.3.4 *Dividir* $27x^6 + 125y^9$ *entre* $3x^2 + 5y^3$.

Al dividir obtenemos

$$\frac{27x^6 + 125y^9}{3x^2 + 5y^3} = (3x^2)^2 - 3x^2(5y^3) + (5y^3)^2 = 9x^4 - 15x^2y^3 + 25y^6.$$

3.3.3. Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos números entre la suma o resta de los números

Veamos varios ejemplos de este tipo de cocientes. En el capítulo 4 se enuncian las reglas de este tipo de cocientes ya que son un caso especial de factorización.

Ejemplo 3.3.5 *Dividir las expresiones indicadas.*

1. $\dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$.

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

2. $\dfrac{a^4 - b^4}{a + b}$.

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3.$$

3. $\dfrac{a^5 + b^5}{a + b}$.

$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$

4. $\dfrac{x^5 + 32}{x + 2}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^5 + 32}{x + 2} &= \frac{x^5 + 2^5}{x + 2} \\ &= x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4 \\ &= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.\end{aligned}$$

3.3.4. Ejercicios resueltos

Encuentra el cociente.

1. $\dfrac{9-x^4}{3-x^2} = 3+x^2.$

2. $\dfrac{25-36x^4}{5-6x^2} = 5+6x^2.$

3. $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z} = x+y+z.$

4. $\dfrac{8x^{12}-729y^6}{2x^4-9y^2} = \dfrac{(2x^4)^3-(9y^2)^3}{2x^4-9y^2} = 4x^8+18x^2y^2+81y^4.$

5. $\dfrac{1-64a^3}{1-4a} = 1+4a+16a^2.$

3.4. Teorema del binomio

Binomio de Newton. Consideremos el binomio $(a+b)$, multiplicando el binomio por el mismo dos y tres veces, obtenemos

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

En estos desarrollos se cumplen las siguientes leyes:

1. Cada desarrollo tiene un término más que el exponente del binomio.

2. El exponente de a en el primer término del desarrollo es igual al exponente del binomio, y en cada término posterior al primero, disminuye 1.

3. El exponente b en el segundo término del desarrollo es 1, y en cada término posterior a éste, aumenta 1.

4. El coeficiente del primer término del desarrollo es 1 y el coeficiente del segundo término es igual al exponente de a en el primer término del desarrollo.

5. El coeficiente de cualquier término se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de a en dicho término anterior y dividiendo este producto por el exponente de b en ese mismo término aumentado en 1.

6. El último término del desarrollo es b elevado al exponente del binomio.

Los resultados anteriores constituyen la **ley del binomio**, que se cumple para cualquier exponente entero positivo. Esta ley se representa por la siguiente formula:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}a^{n-k}b^k + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Esta fórmula descubierta por **Newton** nos permite elevar un binomio a una potencia cualquiera, directamente, sin tener que hallar las potencias anteriores.

3.4.1. Triángulo de Pascal

Los coeficientes de los términos del desarrollo de cualquier potencia de un binomio los da enseguida el siguiente triángulo, llamado **triángulo de Pascal**.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

El modo de formar este triángulo es el siguiente:

En la primera fila horizontal se pone el 1. En la segunda fila se pone 1 y 1. Desde la tercera en adelante se empieza por 1 y cada número posterior al 1 se obtiene sumando en la fila anterior el 1^{er} número con el 2^{do}, el 2^{do} con el 3^{ero}, el 3^{ero} con el 4^{to}, etc., y se termina por 1.

Los **coeficientes** del desarrollo de cualquier potencia n-ésima de un binomio son los números que se hallan en la n-ésima fila horizontal del triángulo de Pascal.

Así los coeficientes del desarrollo de $(x+y)^4$ son los números que están en la cuarta fila horizontal, es decir, 1, 4, 6, 4, 1.

3.4.2. Ejercicios resueltos

Desarrolla las siguientes expresiones.

1. $(a+b)^3$.

Solución.
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. $(a+b)^5$.

Solución.
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Nota que la suma de los exponentes siempre da como resultados 3, en el primer ejercicio y 5 en el segundo ejercicio.

3. Desarrollar por el teorema del binomio $(a+2b)^4$.

Solución.

$$\begin{aligned}(a+2b)^4 &= 1(a^4)+4(a^3)(2b)+6(a^2)(4b^2)+4(a)(8b^3)+1(16b^4)\\ &= a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4.\end{aligned}$$

3.4.3. Ejercicios

Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $(x+1)^2$

b) $(x+y+z)^3$

c) $(z+y)^4$

d) $(a+b+c)^5$

e) $(s-t)^7$

f) $(x^{2a}+y^{3b})^6$

g) $(2x^t-3)^4$

h) $(3z-y+2x)^5$

i) $(x^2-x+1)^2$

j) $(a+b+c+d)^2$.

Capítulo 4

Factorización

4.1. División de polinomios

Empezamos esta sección con las reglas que se siguen para dividir dos polinomios.

1. Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.
3. Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escriben en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.
4. Se divide el primer térmnino del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.
5. Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.
6. Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplo 4.1.1 *Dividir* $3x^2+2x-8$ *entre* $x+2$.

$$\begin{array}{rrr|rr}
+3x^2 & +2x & -8 & x & +2 \\ \hline
-3x^2 & -6x & & 3x & -4 \\
& -4x & -8 & & \\
& +4x & +8. & &
\end{array}$$

Explicación. El dividendo y el divisor están ordenados de manera descendente con relación a x. Dividimos el primer término del dividendo $3x^2$ entre el primero del divisor x y tenemos $3x^2 \div x = 3x$. Éste es el primer término cociente.

Multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del divisor y como estos productos hay que restarlos del dividendo, tendremos $3x \times x = 3x^2$, para restar $-3x^2$; $3x \times 2 = 6x$, para restar $-6x$.

Estos productos con sus signos cambiados los escribimos debajo de los términos semejantes con ellos del dividendo y hacemos la reducción; nos da $-4x$ y bajamos el -8. Dividimos $-4x$ entre x: $-4x \div x = -4$ y éste es el segundo término del cociente. El -4 hay que multiplicarlo por cada uno de los términos del divisor y restar los productos del dividendo y tendremos $(-4) \times x = -4x$, para restar $+4x$; $(-4) \times 2 = -8$, para restar 8.

Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y haciendo la reducción nos da cero de residuo. Luego, tenemos que $3x^2 + 2x - 8 = (x + 2)(3x - 4)$.

4.1.1. Ejercicios resueltos

1. Dividir $\dfrac{12x^3 - 6x^2 + 18x}{6x}$ y simplificar.

Solución.

$$\frac{12x^3 - 6x^2 + 18x}{6x} = \frac{12x^3}{6x} + \frac{-6x^2}{6x} + \frac{18x}{6x} = 2x^2 - x + 3.$$

2. Dividir $\dfrac{(3x + a)^2 - a(3x + a)}{(3x + a)}$ y simplificar.

Solución.

$$\frac{(3x + a)^2 - a(3x + a)}{(3x + a)} = \frac{(3x + a)^2}{3x + a} - \frac{a(3x + a)}{3x + a} = (3x + a) - a = 3x.$$

3. Realiza las operaciones y simplifica.

$$\frac{12a^4 + 4a^3 - 32a^2}{4a^2} - (3a - 8)(a + 1).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\frac{12a^4 + 4a^3 - 32a^2}{4a^2} - (3a - 8)(a + 1) &= (3a^2 + a - 8) - (3a^2 + 3a - 8a - 8) \\
&= (3a^2 + a - 8) - (3a^2 - 5a - 8) \\
&= 3a^2 + a - 8 - 3a^2 + 5a + 8 \\
&= 6a.
\end{aligned}$$

4.1.2. Ejercicios

Realiza las operaciones y simplifica.

a) $\dfrac{x^3 - 12x^2 - 42}{x - 3}$

b) $\dfrac{y^2 - 14y + 49}{y - 7}$

c) $\dfrac{-x^4 + 1}{-x + 1}$

d) $\dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 2}$

e) $\dfrac{am^4 - am - 2a}{am + a}$

f) $\dfrac{x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 5}{x^2 + 3x - 2}$

g) $x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x$ entre $x^2 - x + 3$

h) $\dfrac{1}{6}a^2 + \dfrac{5}{36}ab - \dfrac{1}{6b^2}$ entre $\dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}b$

i) $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 2}{x - 3}$

j) $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{7}{10}xy - \dfrac{1}{3}y^2$ entre $x - \dfrac{2}{5}y$.

4.2. Factorización de polinomios.

Se llaman **factores** o **divisores** de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión. Por ejemplo, multiplicando a por $a + b$ tenemos que

$$a(a + b) = a^2 + ab,$$

es decir, a y $a + b$, que multiplicados entre sí dan como producto $a^2 + ab$, son factores o divisores de $a^2 + ab$. Del mismo modo, de la expresión $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$, tenemos que $x + 2$ y $x + 3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$.

Descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b. Por lo tanto, se puede escribir $15ab = 3 \times 5 \times a \times b$.

Factorizar un polinomio. Así como en aritmética hay números primos que sólo son divisibles entre ellos mismos y entre 1, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles entre ellas mismas y entre 1 y por lo tanto no son el producto de otras expresiones algebraicas. Lo mismo pasa con los polinomios, no cualquier polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1. Por ejemplo, $a + b$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible entre $a + b$ y entre 1.

4.3. Distintos tipos de factorización

En esta sección, vamos a estudiar la manera de descomponer o factorizar polinomios en dos o más factores distintos de 1. En cualesquiera de los 10 casos diferentes de factorización que estudiaremos, la prueba consiste en multiplicar los factores que se obtienen, y su producto tiene que ser igual a la expresión que se factorizó.

Caso 1. Cuando todos los términos de un polinomio tienen un factor común.

a) Factor común monomio.

Veamos los siguientes ejemplos, cuando todos los términos del un polinomio tienen un factor común, el cual es un monomio.

Ejemplo 4.3.1 1. *Descomponer en factores* $a^2 + 2a$.
Los términos a^2 *y* $2a$ *contienen en común a la variable* a. *Escribimos el factor común* a *como coeficiente y dentro de un paréntesis escribimos los cocientes de dividir* $a^2/a = a$ *y* $2a/a = 2$, *para obtener* $a^2 + 2a = a(a + 2)$.

2. *Descomponer* $10b - 30ab^2$.
Primeros veamos los factores comunes de los números 10 *y* 30. *Como* $30 = 3\cdot 10$ *vemos que* 10 *es el factor común de los dos números. De las letras, el único factor común es* b *porque se encuentra en los dos términos de la expresión dada y la tomamos con su menor exponente. De esta forma, el factor común es* $10b$, *por lo que* $10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$.

3. *Descomponer* $10a^2 - 5a + 15a^3$.
En este caso el factor común es $5a$ *por lo que*
$$10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2).$$

4. *Factorizar* $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$.
El factor común es $18my^2$, *por lo que*
$$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2).$$

5. *Factorizar* $6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3$.
El factor común es $3xy^3$, *luego*
$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3).$$

b) Factor común polinomio.

Ahora, veamos algunos ejemplos cuando un polinomio es un factor común.

Ejemplo 4.3.2 1. *Descomponer* $x(a+b)+m(a+b)$.
Los dos términos de esta expresión tienen de factor común el binomio $(a+b)$. *Escribimos el factor común* $(a+b)$ *como coeficiente y dentro de un paréntesis escribimos los cocientes de dividir* $x(a+b)/(a+b)=x$ *y* $m(a+b)/(a+b)=m$, *para obtener*

$$x(a+b)+m(a+b)=(a+b)(x+m).$$

2. *Factorizar* $2x(z-3)-y(z-3)$.
El factor común es $(z-3)$. *Entonces*

$$2x(z-3)-y(z-3)=(z-3)(2x-y).$$

3. *Factorizar* $x(a-1)+y(a-1)-a+1$.
El factor común es $(a-1)$. *Entonces*

$$\begin{aligned} x(a-1)+y(a-1)-a+1 &= x(a-1)+y(a-1)-(a-1) \\ &= (x+y-1)(a-1). \end{aligned}$$

Caso 2. Factor común por agrupación de términos.

Para ilustrar este caso de factorización veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3.3 *Factorizar* $ax+bx+ay+by$.

Los dos primeros términos tienen el factor común x *y los dos últimos el factor común* y. *Agrupamos los dos primeros términos en un paréntesis y los dos últimos en otro paréntesis precedido del signo* $+$ *porque el tercer término tiene el signo* $+$, *y obtendremos*

$$ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y).$$

Veamos otro ejemplo de este caso.

Ejemplo 4.3.4 *Factorizar* $ax-ay+az+x-y+z$.

Es claro que podemos factorizar la a *para obtener*

$$\begin{aligned} ax-ay+az+x-y+z &= (ax-ay+az)+(x-y+z) \\ &= a(x-y+z)+x-y+z \\ &= (x-y+z)(a+1). \end{aligned}$$

Caso 3. Trinomio cuadrado perfecto.

Regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto. Un **trinomio** es **cuadrado perfecto** cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales. Por ejemplo, $a^2+2ab+b^2$ es cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de $a+b$, es decir,

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2.$$

Del mismo modo, $(2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Un trinomio ordenado en relación con una letra es cuadrado perfecto cuando el primero y tercer términos son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3.5 1. *Factorizar* $4x^2 + 25y^2 - 20xy$.
Observemos que la expresión dada es un trinomio cuadrado perfecto ya que $4x^2 + 25y^2 - 20xy = 4x^2 - 20xy + 25y^2$. *Luego se puede factorizar como* $4x^2 + 25y^2 - 20xy = (2x-5y)^2$.

2. *Descomponer en factores la expresion* $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4$.
Es fácil ver que $1 - 16ax^2 + 64a^2x^4 = (1-8ax^2)^2$.

3. *Expresar como producto de dos factores, la expresión* $a^2 + 2a(a-b) + (a-b)^2$.
Observemos que la expresion es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que $a^2 + 2a(a-b) + (a-b)^2 = (a+(a-b))^2 = (2a-b)^2$.

Caso 4. Diferencia de cuadrados perfectos.

En los productos notables se vió que la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; luego, reciprocamente

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Para **factorizar una diferencia de cuadrados** se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplo 4.3.6 . *Factorice las siguientes expresiones.*

1. $1 - a^2$.
Observe que $1 - a^2 = (1+a)(1-a)$.

2. $16x^2 - 25y^4$.
Note que $16x^2 - 25y^4 = (4x+5y^2)(4x-5y^2)$.

3. $\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^4}{9}$.

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right).$$

4. $(a+b)^2 - c^2$.

$$(a+b)^2 - c^2 = ((a+b)+c)((a+b)-c) = (a+b+c)(a+b-c).$$

Casos especiales. Combinación de los casos **3** y **4**.

Veamos ahora descomposición de expresiones compuestas en las cuales mediante un arreglo conveniente de sus términos se obtiene uno o dos trinomios cuadrados perfectos y descomponiendo estos trinomios se obtiene una diferencia de cuadrados.

Ejemplo 4.3.7 .

1. *Factorizar* $a^2 + 2ab + b^2 - 1$.

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 - 1 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 1 \\ &= (a + b)^2 - 1 \\ &= (a + b + 1)(a + b - 1). \end{aligned}$$

2. *Descomponer* $9a^2 - x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{aligned} 9a^2 - x^2 + 2x - 1 &= 9a^2 - (x^2 - 2x + 1) \\ &= 9a^2 - (x - 1)^2 \\ &= (3a + (x - 1))(3a - (x - 1)) \\ &= (3a + x - 1)(3a - x + 1). \end{aligned}$$

Caso 5. Trinomio cuadrado perfecto por suma y resta.

Consideremos el trinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$ y analicemos si es un trinomio cuadrado perfecto. La raíz cuadrada de x^4 es x^2; la raíz cuadrada de y^4 es y^2 y el doble producto de estas raíces es $2x^2y^2$, luego este trinomio no es cuadrado perfecto.

Para que sea cuadrado perfecto, y podamos factorizarlo, hay que lograr que el término x^2y^2 se convierta en $2x^2y^2$, lo cual se logra si sumamos x^2y^2, pero para que el trinomio no cambie hay que restar la misma cantidad que se suma, es decir

$$\begin{aligned} x^4 + x^2y^2 + y^4 &= x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.8 .

1. *Descomponer* $4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4$.

$$\begin{aligned} 4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 &= 4a^4 + 8a^2b^2 + 9b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \\ &= 4a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (2a^2 + 3b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (2a^2 + 3b^2 + 2ab)(2a^2 + 3b^2 - 2ab). \end{aligned}$$

2. *Factorizar* $49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8$.

$$\begin{aligned} 49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8 &= 49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8 - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4)^2 - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4 + 5mn^2)(7m^2 - 9n^4 - 5mn^2). \end{aligned}$$

Caso especial. Factorizar una suma de dos cuadrados.

En general una **suma de cuadrados** no tiene descomposición en factores racionales, es decir, factores en que no haya raíz. Sin embargo, hay sumas de cuadrados que, al sumar y restar una misma cantidad, pueden llevarse al caso anterior y descomponerse.

Ejemplo 4.3.9 .

1. *Descomponer* $a^4 + 4b^4$.

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \\ &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab). \end{aligned}$$

Caso 6. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

La regla práctica para factorizar un trinomio de la forma x^2+bx+c es la siguiente. El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x, es decir, la raíz cuadrad del primer término del trinomio.

En el primer factor, después de x, se escribe el signo del segundo termino del trinomio, y en el segundo factor, después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar los signos del segundo y tercer términos del trinomio.

Si los dos factores binomios tienen en el medio signos iguales se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.

Si los dos factores binomios tienen en el medio signos diferentes se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.

Ejemplo 4.3.10 .

1. *Factorizar* $x^2 + 5x + 6$.

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= (x \quad)(x \quad) \\ &= (x + \ )(x + \ ) \\ &= (x + 3)(x + 2). \end{aligned}$$

2. *Factorizar* $x^2 + 2x - 15$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= (x \quad\ )(x \quad\ ) \\ &= (x + \ \ )(x - \ \ ) \\ &= (x+5)(x-3). \end{aligned}$$

3. *Factorizar* $n^2 + 28n - 29$.

$$\begin{aligned} n^2 + 28n - 29 &= (n \quad\ )(n \quad\ ) \\ &= (n + \ \ )(n - \ \ ) \\ &= (n+29)(n-1). \end{aligned}$$

4. *Factorizar* $x^4 + 5x^2 - 50$.

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^2 - 50 &= (x^2 \quad\ )(x^2 \quad\ ) \\ &= (x^2 + \ \ )(x^2 - \ \ ) \\ &= (x^2+10)(x^2-5). \end{aligned}$$

Caso 7. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Los trinomios de esta forma se diferencian de los trinomios del caso anterior en que el rimer término tiene un coeficiente distinto de 1.

Ejemplo 4.3.11 .

1. *Factorizar* $6x^2 - 7x - 3$.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 7x - 3 &= \frac{6(6x^2 - 7x - 3)}{6} = \frac{1}{6}(36x^2 - 7(6x) - 18) \\ &= \frac{1}{6}(6x \quad\ )(6x \quad\ ) = \frac{1}{6}(6x - \ \ )(6x + \ \ ) \\ &= \frac{1}{6}(6x-9)(6x+2) = \frac{1}{2 \cdot 3}(6x-9)(6x+2) \\ &= \frac{6x-9}{3} \cdot \frac{6x+2}{2} \\ &= (2x-3)(3x+1). \end{aligned}$$

2. *Factorizar* $20x^2 + 7x - 6$.

$$\begin{aligned}
20x^2+7x-6 &= \frac{20(6x^2+7x-6)}{20} = \frac{1}{20}(20^2x^2+7(20x)-120)\\
&= \frac{1}{20}(20x \qquad)(20x \qquad) = \frac{1}{20}(20x+ \quad)(20x- \quad)\\
&= \frac{1}{20}(20x+15)(20x-8) = \frac{1}{5\cdot 4}(20x+15)(20x-8)\\
&= \frac{20x+15}{5}\cdot\frac{20x-8}{4}\\
&= (4x+3)(5x-2).
\end{aligned}$$

Caso 8. Cubo perfecto de binomios.

En el capítulo 3 de productos notables se estudiarón los productos

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

que son expresiones llamadas binomios al cubo o cubo perfecto de binomios. En general, una expresión es el cubo de un binomio si tiene 4 términos, donde el primer término y el último son cubos perfectos. Además, el segundo término es mas o menos el triple del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la ráiz cúbica del último término; y el tercer trmino es el triple de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Ejemplo 4.3.12 .

1. *Factorizar* $1+12a+48a^2+64a^3$.

$$\begin{aligned}
1+12a+48a^2+64a^3 &= 1^3+3(1)^2\cdot 4a+3(1)(4a)^2+(4a)^3\\
&= (1+4a)^3.
\end{aligned}$$

2. *Factorizar* $a^9-18a^6b^5+108a^3b^10-216b^{15}$.

$$\begin{aligned}
a^9-18a^6b^5+108a^3b^10-216b^{15} &= (a^3)^3-3(a^3)^2\cdot 9b^5+3(a^3)(9b^5)^2-(9b^5)^3\\
&= (a^3-9b^5)^3.
\end{aligned}$$

Caso 9. Suma o diferencia de cubos perfectos.

Sabemos que

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad (4.1)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2). \qquad (4.2)$$

La fórmula (4.1) nos dice que la suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: la suma de sus raíces cúbicas y el otro factor es el cuadrado de la primera raíz, **menos** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.
La fórmula (4.2) nos dice que la diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: la suma de sus raíces cúbicas y el otro factor es el cuadrado de la primera raíz, **más** el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo 4.3.13 .

1. *Factorizar* x^3+1.

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x(1)+1^2)=(x+1)(x^2-x+1).$$

2. *Factorizar* a^3-8.

$$a^3-8=(a-2)(a^2+2(a)+2^2)=(a-2)(a^2+2a+4).$$

3. *Factorizar* $27a^3+b^6$.

$$27a^3+b^6=(3a+b^2)((3a)^2-3a(b^2)+(b^2)^2)=(3a+b^2)(9a^2-3ab^2+b^4).$$

4. *Factorizar* $8x^3-125$.

$$8x^3-125=(2x-5)(4x^2+10x+25).$$

Caso 10. Suma o diferencia de dos potencias iguales.

Por medio de la división de polinomios se puede mostrar lo siguiente.

Propiedades 4.3.14 (a) a^n-b^n *es divisible entre* $a-b$ *cuando* n *es par o impar.*

(b) a^n+b^n *es divisible entre* $a+b$ *si* n *es impar.*

(c) a^n-b^n *es divisible entre* $a+b$ *si* n *par.*

(d) a^n+b^n *nunca es divisible entre* $a+b$ *ni entre* $a-b$ *cuando* n *es un número par.*

Ejemplo 4.3.15 .

1. *Factorizar* m^5+n^5.

$$m^5+n^5=(m+n)(m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3+n^4).$$

2. Factorizar $x^5 + 32$.

$$\begin{aligned} x^5 + 32 = x^5 + 2^5 &= (x+2)(x^4 - x^3(2) + x^2(2^2) - x(2^3) + 2^4) \\ &= (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16). \end{aligned}$$

3. Factorizar $x^7 - 1$.

$$x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

4.3.1. Ejercicios resueltos

1. Factorice el polinomio $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3$.

Solución.

$$\begin{aligned} 2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3 &= (2xy)x^2 - (2xy)4xy - (2xy)3y^2 \\ &= 2xy(x^2 - 4xy - 3y^2). \end{aligned}$$

2. Factorice completamente el siguiente polinomio

$$4(2x+7)(x-3)^2 + 2(2x+7)^2(x-3).$$

Solución.

$$\begin{aligned} 4(2x+7)(x-3)^2 + 2(2x+7)^2(x-3) &= 2(2x+7)(x-3)[2(x-3) + (2x+7)] \\ &= 2(2x+7)(x-3)(2x - 6 + 2x + 7) \\ &= 2(2x+7)(x-3)(4x+1). \end{aligned}$$

3. Factorice completamente $3x^2 - 6x + 4x - 8$.

Solución.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 4x - 8 &= (3x^2 - 6x) + (4x - 8) \\ &= 3x(x-2) + 4(x-2) \\ &= (3x+4)(x-2). \end{aligned}$$

4. Factorice completamente $4(2x+5)(3x+1)^2 + 6(2x+5)^2(3x+1)$.

Solución.

$$\begin{aligned} 4(2x+5)(3x+1)^2 + 6(2x+5)^2(3x+1) &= 2(2x+5)(3x+1)[2(3x+1) + 3(2x+5)] \\ &= 2(2x+5)(3x+1)(6x + 2 + 6x + 15) \\ &= 2(2x+5)(3x+1)(12x+17). \end{aligned}$$

5. Factorizar $\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}$.

Solución. La expresión es un trinomio cuadrado perfecto, luego

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9} = \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{3}\right)^2.$$

6. Factorizar $(a+x)^2 - (x+2)^2$.

Solución. La expresión es un diferencia de cuadrados, luego

$$\begin{aligned}(a+x)^2 - (x+2)^2 &= [(a+x)+(x+2)][(a+x)-(x+2)] \\ &= (a+x+x+2)(a+x-x-2) \\ &= (a+2x+2)(a-2).\end{aligned}$$

7. Factorizar $a^4 + a^2 + 1$.

Solución. Tenemos que convertir la expresión en un trinomio cuadrado perfecto, es decir,

$$\begin{aligned}a^4 + a^2 + 1 &= a^4 + a^2 + 1 + a^2 - a^2 \\ &= (a^4 + 2a^2 + 1) - a^2 \\ &= (a^2+1)^2 - a^2 \\ &= (a^2+1+a)(a^2+1-a).\end{aligned}$$

8. Factorizar $30 + y^2 - y^4$.

Solución.

$$\begin{aligned}30 + y^2 - y^4 &= -(y^4 - y^2 - 30) \\ &= -(y^2 \quad\;)(y^2 \quad\;) \\ &= -(y^2 - \;\;)(y^2 + \;\;) \\ &= -(y^2 - 6)(y^2 + 5) \\ &= (6 - y^2)(y^2 + 5).\end{aligned}$$

9. Factorizar $8 - (x-y)^3$.

Solución.

$$\begin{aligned}8 - (x-y)^3 &= (2-(x-y))(2^2 + 2(x-y) + (x-y)^2) \\ &= (2-x+y)((4+2x-2y+x^2-2xy+y^2).\end{aligned}$$

10. Factorizar $x^3 - 4x - x^2 + 4$.

Solución.

$$\begin{aligned} x^3-4x-x^2+4 &= (x^3-4x)-(x^2-4)\\ &= x(x^2-4)-(x^2-4)\\ &= (x-1)(x^2-4)\\ &= (x-1)(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

4.3.2. Ejercicios

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $10b+30ab$

b) $24a^2xy^2-36x^2y^4$

c) $12a^2b^3-30a^3b^2+18ab^4-42a^4b$

d) $x(2a+b+c)-2a-b-c$

e) $3x^2-6x-4y-2xy$

f) $a(x-1)-(a+2)(x-1)$

g) $2av^2+3u^3+2auv-3av^2-2au^2-3vu^2$

h) $2x^2y+2xz^2+y^2z^2+xy^3$

i) $5x^3-5x2y+3x^2-3xy+7x-7y$

j) $a^2b^3-n^4+a^2b^3x^2-n^4x^2-3a^2b^3x+3n^4x$

k) x^2-4

l) x^3-y^3

m) z^4-y^4

n) a^5+c^5

o) s^3+t^3

p) $729x^6-64b^6$

q) $16x^4-3^4$

r) $5^5+\frac{243}{32}x^5$

s) x^2+y^2

t) $a^{10}-b^{10}$.

4.4. Fracciones complejas

Una **fracción compleja** es una fracción en la cual el numerador o el denominador, o ambos, son fracciones algebraicas o expresiones mixtas, como

$$\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}.$$

Una fracción compleja no es más que una división indicada; la raya de la fracción equivale al signo de dividir y ella indica que hay que dividir lo que está encima de la raya por lo que está debajo de ella.

Así, la fracción $\dfrac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{a}{x}}$ equivale a $\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}\right)\div\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$.

Simplificación de fracciones complejas

1. Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador y denominador de la fracción compleja.

2. Se divide el resultado que se obtenga en el numerador entre el resultado que se obtenga en el denominador.

4.4.1. Ejercicios resueltos

1. Simplificar $\dfrac{\frac{4}{9}-\frac{3}{8}}{\frac{7}{12}-\frac{11}{18}}$.
Solución.

$$\frac{\frac{4}{9}-\frac{3}{8}}{\frac{7}{12}-\frac{11}{18}}=\frac{18(\frac{4}{9}-\frac{3}{8})}{18(\frac{7}{12}-\frac{11}{18})}=\frac{8-\frac{27}{4}}{\frac{21}{2}-11}=\frac{4(8-\frac{27}{4})}{4(\frac{21}{2}-11)}=\frac{32-27}{42-44}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}.$$

Nota que en esta manera de simplificar solo elegimos el denominador más grande para multiplicar y dividir, lo cual no garantiza que desaparezcan todos los denominadores, y así el proceso de debe repetir. Solucionaremos el problema de una manera alternativa donde no sera necesario multiplicar más de una vez.

Segunda solución. El mínimo común múltiplo de los denominadores es 72

$$\frac{\frac{4}{9}-\frac{3}{8}}{\frac{7}{12}-\frac{11}{18}}=\frac{72(\frac{4}{9}-\frac{3}{8})}{72(\frac{7}{12}-\frac{11}{18})}=\frac{32-27}{42-44}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}.$$

Los siguientes ejercicios los resolveremos de esta forma, utilizando el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

2. Simplificar $\dfrac{x-2}{x+2-\frac{4}{x-1}}$.

Solución. El m.c.m. de los denominadores es $(x-1)$, luego

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{x+2-\frac{4}{x-1}} &= \frac{(x-1)(x-2)}{\frac{x-1}{1}(\frac{x+2}{1}-\frac{4}{x-1})} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)-4}\\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{x^2+x-2-4} = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2+x-6}\\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x+3}.\end{aligned}$$

3. Simplificar $\dfrac{x+3+\frac{6}{x-4}}{x+5+\frac{18}{x-4}}$.

Solución. El m.c.m. de los denominadores es $x-4$, luego

$$\begin{aligned}\frac{x+3+\dfrac{6}{x-4}}{x+5+\dfrac{18}{x-4}} &= \frac{(x-4)\left(x+3+\dfrac{6}{x-4}\right)}{(x-4)\left(x+5+\dfrac{18}{x-4}\right)} = \frac{(x-4)(x+3)+6}{(x-4)(x+5)+18}\\ &= \frac{x^2-x-12+6}{x^2+x-20+18} = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}\\ &= \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.\end{aligned}$$

4.4.2. Ejercicios

Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$

b) $\dfrac{\dfrac{b^2}{c}-\dfrac{b^2-c^2}{b+c}}{\dfrac{b-c}{c}+\dfrac{c}{b}}$

c) $\dfrac{1-\dfrac{7}{a}+\dfrac{12}{a^2}}{a-\dfrac{16}{a}}$

d) $\dfrac{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{x^2}}$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{a+b+c}-\dfrac{1}{a-b+c}}{\dfrac{1}{a-b+c}-\dfrac{1}{a+b+c}}$

f) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}}{\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}}$

g) $$\dfrac{\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+2x-3}}{\dfrac{4x-2x^2}{x^3-2x^2+x}}$$

h) $$\dfrac{1}{a+2-\dfrac{a+1}{a-\dfrac{1}{a}}}$$

i) $$\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{a-\dfrac{a^2}{a+1}}}$$

j) $$\dfrac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}.$$

Capítulo 5

Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas.

Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto u, v, w, x, y, z. Así, $5x+2=17$ es una **ecuación**, por que es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo se verifica, es decir, sólo es verdadera para el valor $x = 3$. En efecto, si sustituimos la x por 3, tenemos que $5(3) + 2 = 17$, es decir, $17 = 17$. Si damos a x un valor distinto de 3 la igualdad no se verifica o no es verdadera.

Se llama **primer miembro** de una ecuación a la expresión que está a la izquierda del signo de igualdad, y segundo miembro, a la expresión que está a la derecha.

5.1. Clases de ecuaciones

Una **ecuación numérica** es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas, como

$$4x - 5 = x + 4,$$

donde la unica letra es la incógnita x.

Una **ecuación literal** es una ecuación que además de las incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas, como

$$3x + 2a = 5b - 5bx.$$

Una ecuación es **entera** cuando ninguno de sus términos tiene denominador como en los ejemplos anteriores, y es **fraccionaria** cuando algunos o todos sus términos tienen denominador, como

$$\frac{3x}{2} + \frac{6x}{5} = 5 + \frac{x}{5}.$$

El **grado** de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación. Así, $4x - 6 = 3x - 1$ es una ecuación de **primer grado** porque el mayor exponente de x es 1.

5.2. Concepto de solucion de una ecuación

Las **raíces o soluciones** de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en identidad. Así, en la ecuación

$$5x - 6 = 3x + 8,$$

la raíz es 7 porque haciendo $x = 7$ se tiene $5(7) - 6 = 3(7) + 8$, es decir, $29 = 29$, donde vemos que 7 satisface la ecuación.

Las **ecuaciones de primer grado** con una incógnita tienen **una sola raíz**. **Resolver una ecuación** es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

Axioma fundamental de las ecuaciones

Si a cantidades iguales se aplican operaciones iguales, los resultados serán iguales.

Reglas que se derivan de este axioma.

1. Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

2. Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

3. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

4. Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.

5. Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.

La **trasposición de términos** consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro. Cualquier miembro de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

Por ejemplo, consideremos la ecuación $3x + b = 2a$. Restando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste, y se tiene que $3x + b - b = 2a - b$, y como $b - b = 0$, queda $3x = 2a - b$.

Resolución de ecuaciones enteras de primer grado con una incognita.

Se tiene la siguiente regla general.

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la trasposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3. Se reducen términos semajantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación $3x - 5 = x + 3$. Pasando x al primer miembro y -5 al segundo, cambiandoles los signos, tenemos $3x - x = 3 + 5$. Reduciendo los términos semejantes, tenemos $2x = 8$. Dividiendo los dos miembros de la ecuación entre 2, tenemos

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}.$$

Por último simplificamos y obtenemos $x = 4$.

5.2.1. Ejercicios

Encuentra el valor de x en las siguientes ecuaciones.

a) $11x + 5x - 1 = 65x - 36$.

b) $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172$.

c) $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$.

d) $15x + (-6x + 5) - 2 - (-x + 3) = -(7x + 23) - x + (3 - 2x)$.

e) $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 0$.

f) $\frac{3x}{4} - \frac{1}{5} + 2x = \frac{5}{4} - \frac{3x}{20}$.

g) $14 - 12x + 39x - 18 = 256 - 60x - 657x$.

h) $10x - \frac{8x-3}{4} = 2(x - 3)$.

i) $71 + [-5x + (-2x + 3)] = 25 - [-(3x + 4) - (4x + 3)]$.

j) $\frac{3x-1}{2} - \frac{5x+4}{3} - \frac{x+2}{8} = \frac{2x-3}{5} - \frac{1}{10}$.

5.3. Planteamiento y resolución de problemas

5.3.1. Ejercicios resueltos

1. El triple de un número excede en 48 al tercio del mismo número. Hallar tal número.

Solución. Sea x el número buscado, entonces el enunciado nos dice que

$$3x = \frac{x}{3} + 48$$

Tenemos entonces que $9x = x + 144$, de donde $8x = 9x - x = 144$. Por lo tanto $x = \frac{144}{8} = 18$.

2. Hallar dos números consecutivos tales que el menor exceda en 81 a la diferencia entre los $\frac{3}{4}$ del menor y los $\frac{2}{5}$ del mayor.

Solución. Sea x el número menor y sea $x + 1$ el número mayor, entonces el enunciado dice que

$$x = \frac{3x}{4} - \frac{2(x+1)}{5} + 81.$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} 20x &= 15x - 8(x+1) + 1620 \\ &= 15x - 8x - 8 + 1620 \\ &= 7x + 1612, \end{aligned}$$

de donde $13x = 20x - 7x = 1612$, es decir, $x = \frac{1612}{13} = 124$.

3. Hallar tres números consecutivos tales que si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es 9.

Solución. Como son tres números consecutivos, si x es el menor de los números, los otros serán $x + 1$ y $x + 2$. Entonces se tiene que

$$\frac{x}{20} + \frac{x+1}{27} + \frac{x+2}{41} = 9.$$

El m.c.m. de 20, 27 y 41 es $(5)(2)^2(3)^3(41) = 22140$, por lo que

$$1107x + 820(x+1) + 540(x+2) = 199260, \quad 1107x + 820x + 820 + 540x + 1080 = 199260$$

$$2467x + 1900 = 199260, \qquad 2467x = 199260 - 1900 = 197360,$$

de donde $x = 80$.

4. Un hombre viajó 9362 km por barco, tren y avión. Por tren recorrió $\frac{4}{9}$ de lo que recorrió en barco, y en avión $\frac{5}{8}$ de lo que recorrió en tren. ¿Cuántos km recorrió de cada como?

Solución. Sea x los km que recorrió por barco. Entonces recorrió $\frac{4x}{9}$ por tren, y recorrió $\frac{5}{8}(\frac{4x}{9})$ por avión. Entonces

$$x + \frac{4x}{9} + \frac{20x}{72} = 9362, \quad 72x + 32x + 20x = 674064,$$

$$\text{de donde} \quad 124x = 674064 \quad \text{o} \quad x = 5436.$$

Entonces recorrió 5436 km por barco, 2416 km por tren y 1510 por avión.

5.3.2. Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas.

a) Un padre tiene 35 años y su hijo 5, ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre 3 veces mayor que la edad del hijo?

b) Un enjambre de abejas salió a libar miel; la mitad de ellas se quedó en la primera flor que encontró, la tercera parte en la segunda flor y cinco siguieron volando. ¿Cuantas abejas conformaban el enjambre?

c) Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

d) La base de un rectangulo es el doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30cm?

e) En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres, y el triple de nios que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y nios hay, si la reunión la componen 96 personas?

f) Se han consumido $\frac{7}{8}$ de un bidón de aceite. Reponemos 38ltrs. y el bidón ha quedado lleno hasta sus $\frac{3}{5}$ partes. Calcula la capacidad del bidón.

g) Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

h) En una libreria, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero, y un comic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la libreria tenia 12 pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

i) Las 3 cuartas partes de la edad del padre de Juan excede 15 años a la edad de este. Hace 4 anõs la edad del padre era el doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

j) Trabajando juntos, 2 obreros tardan en hacer un trabajo 14hrs. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado, si uno es el doble de rapido que el otro?

Capítulo 6

Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado** es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2. Así,

$$4x^2 + 7x + 6 = 0$$

es una ecuación de segundo grado.

Las **raíces de una ecuación de segundo grado** son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Así, las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$; ambos valores satisfacen esta ecuación.

Las **ecuaciones completas** de segundo grado son ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

las cuales tienen un término en x^2, un término en x y un término independiente de x. Así, $2x^2 + 7x - 15 = 0$ y $x^2 - 8x + 15 = 0$ son ecuaciones completas de segundo grado.

6.1. Ecuaciones de segundo grado incompletas

Las ecuaciones incompletas de segundo grado son de la forma $ax^2 + c = 0$, que no tienen término lineal, es decir, no tienen término en x, o de la forma $ax^2 + bx = 0$, que no tienen término independiente. Así $x^2 - 16 = 0$ y $3x^2 + 5x = 0$ son ecuaciones incompletas de segundo grado.

6.1.1. Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$

Para encontrar las raíces de ecuaciones de la forma $ax^2+c = 0$, primero pasamos c al segundo miembro, así

$$ax^2 = -c,$$

despues dividimos ambos miembros de la ecuación entre a, así

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

por último en ambos miembros de la ecuación extraemos la raiź cuadrada, de donde

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Si a y c tienen el mismo signo, las raíces son imaginarias por ser la raíz cuadrada de una cantidad negativa; si tienen signo distinto, las raíces son reales.

Ejemplo 6.1.1 *Resuelva la ecuación*

$$x^2 + 1 = \frac{7x^2}{9} + 3.$$

Quitando denominadores obtenemos la ecuación $9x^2 + 9 = 7x^2 + 27$*, la cual podemos simplificar como* $2x^2 - 18 = 0$*, la cual es una ecuación de segundo grado incompleta sin término en* x*. Luego, las soluciones son* $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$*.*

6.1.2. Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación $3 - \dfrac{3}{4x^2 - 1} = 2.$

Solución. Simplificando la ecuación dada obtenemos que

$$1 = 3 - 2 = \frac{3}{4x^2 - 1}, \quad \text{de donde} \quad 4x^2 - 1 = 3.$$

Esta es la ecuación incompleta $4x^2 - 4 = 0$, la cual se resuelve por $x = \pm 1$.

2. Resolver la ecuación $5x^2 + 12 = 3x^2 - 20.$

Solución. Agrupando término similares, obtenemos que $5x^2 - 3x^2 = -20 - 12$, es decir, $2x^2 = -32$. De esta manera, tenemos que resolver la ecuación incompleta $x^2 = -16$, la cual tiene dos raíces imaginarias $x = \pm\sqrt{-16}$.

6.1.3. Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $2x^2 - 6 = 0$

c) $5x^2 - 11 = 0$

d) $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

e) $3x^2 - 24 = 0$

f) $3x^2 = 48$

g) $(5x - 4)(5x + 4) - 25 = 0$

h) $2x - 3 - \frac{x^2+1}{x-2} = -7$

i) $3 - \frac{3}{4x^2-1} = 2$

j) $\frac{x^2-5}{3} + \frac{4x^2-1}{5} - \frac{14x2-1}{15} = 0.$

6.1.4. Ecuaciones incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$

Encontremos las soluciones de la ecuación $ax^2+bx=0$ por factorización. Descomponiendo en factores obtenemos que $ax^2+bx=x(ax+b)=0$, de donde $x=0$ o $ax+b=0$. Por lo tanto, las soluciones son $x=0$ y $x=-\frac{b}{a}$.

En este tipo de ecuaciones incompletas de segundo grado siempre **una raíz es cero** y la otra es el coeficiente del término en x, con signo contrario, dividido entre el coeficiente del término en x^2.

Ejemplo 6.1.2 *Resuelva la ecuación*

$$3x-1=\frac{5x+2}{x-2}.$$

Quitando denominadores obtenemos la expresión $(3x-1)(x-2)=5x+2$*, la cual podemos simplificar como* $3x^2-12x=0$*, la cual es una ecuación de segundo grado incompleta sin término constante. Esta expresión se puede factorizar como* $3x^2-12x=3x(x-4)=0$ *Luego, las soluciones son* $x=0$ *y* $x=4$*.*

6.1.5. Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación $5x^2=-3x$.

Solución. Trasponiendo los términos, obtenemos que

$$5x^2+3x=x(5x+3)=0, \quad \text{de donde} \quad x=0 \ \text{ y } \ x=-\frac{3}{5}.$$

2. Resolver la ecuación $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+4}{x-2}=1.$

Solución. Multiplicando la ecuación por el mínimo común múltiplo $(x-1)(x-2)$, obtenemos que $(x+1)(x-2)-(x+4)(x-1)=(x-1)(x-2)$, la cual se simplifica como $x^2-x-2-(x^2+3x-4)=x^2-3x+2$. Agrupando términos semejantes, obtenemos la ecuación $x^2+x=0$, la cual tiene soluciones $x=0$ y $x=-1$.

6.1.6. Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2=5x$

b) $4x^2=-32x$

c) $x^2-3x=3x^2-4x$

d) $5x^2+4=2(x+2)$

e) $(x-3)^2-(2x+5)^2=-16$

f) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{3}{2}.$

6.2. Ecuación general de segundo grado

Si tenemos una ecuación de la forma

$$x^2 + 2mx + m^2 = d, \tag{6.1}$$

donde el primer miembro de la igualdad es un trinomio cuadrado perfecto, podemos encontrar las raíces de la ecuación factorizando el primer miembro, así

$$(x + m)^2 = d,$$

luego extraemos la raiź cuadrada en ambos miembros de la ecuación, así

$$x + m = \pm\sqrt{d},$$

despues trasponemos m, para obtener $x = -m \pm \sqrt{d}$.

6.2.1. Deducción de la formula general de la solución de una ecuación de segundo grado

El procedimiento para completar cuadrados en una ecuación de segundo grado de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

consiste transformar esta ecuacion en una ecuación equivalente, donde el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto y el segundo miembro es un término independiente, es decir, como en la ecuación (6.1).

Procedimiento:

1. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por $4a$, tenemos

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

2. Se suma b^2 en ambos miembros

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2.$$

3. Trasponemos $4ac$ al segundo miembro

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac.$$

4. De este modo el primer miembro de la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que obtenemos la ecuación

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

5. Extraemos la raíz cuadrada de ambos miembros de la ecuación, así
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$
6. Trasponemos b,
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$
7. Dividimos ambos miembros entre $2a$, para obtener
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{6.2}$$

A la fórmula (6.2) se le conoce como **formula general**. De hecho, hemos mostrado el siguiente resultado.

Proposición 6.2.1 *Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es un polinomio cuadrático, entonces las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ son*
$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{6.3}$$

Otra manera un tanto distinta de encontrar las raíces de una ecuación cuadrática es la siguiente. Como $a \neq 0$, podemos reescribir el polinomio $P(x)$ como

$$\begin{aligned}
P(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4c}{4a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right)\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \\
&= a\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right].
\end{aligned}$$

Luego, $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ son sus raíces.
Al número $\Delta = b^2 - 4ac$ le llamamos el **discriminante** del polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Observación 6.2.2 *Si el discriminante, $b^2 - 4ac$, del polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$ se anula, el polinomio $P(x)$ puede ser escrito como una constante multiplicada por el cuadrado de un polinomio lineal. En este caso, el polinomio $P(x)$ sólo tiene una raíz real, que es igual a $-\frac{b}{2a}$.*

En el caso en que el discriminante es mayor a cero, es decir, $b^2 - 4ac > 0$ vemos que el polinomio $P(x)$ tiene dos raíces reales distintas.

Finalmente, cuando el discriminante sea negativo, se obtienen dos raíces complejas distintas.

En conclusión, si r y s son las dos raíces del polinomio $P(x)$, entonces el discriminante se anula si y sólo si $r = s$. En el caso que el discriminante sea diferente de cero, $r \neq s$, y $P(x) = a(x - r)(x - s)$.

Ahora veamos el significado geométrico del discriminante de un polinomio cuadrático. Recordemos que $P(x) = ax^2 + bx + c$ puede escribirse como

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - 4ac\right)\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Para graficar la ecuación anterior, es decir, dibujar las parejas de puntos $(x, y) = (x, P(x))$ en el plano cartesiano, hacemos $y = P(x)$, de donde obtenemos la ecuación

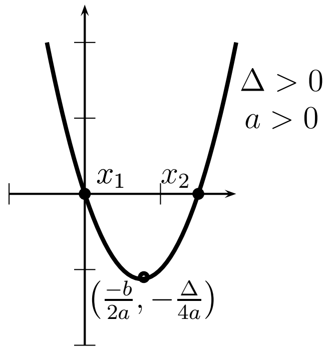
$$y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2, \tag{6.4}$$

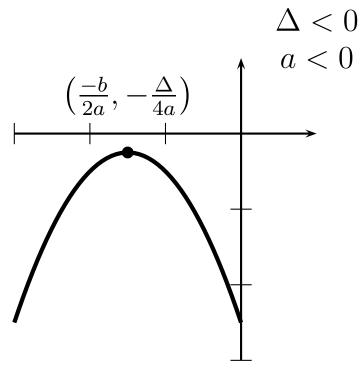
la cual representa la ecuación de una parábola con vértice en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, donde el signo del coeficiente a determina si la parábola abre hacia arriba ($a > 0$), o hacia abajo ($a < 0$).

De hecho, la ecuación (6.4) nos dice mucho más acerca del polinomio cuadrático $P(x)$. Supongamos que $a > 0$, es decir, la parábola abre hacia arriba. La segunda coordenada del vértice, $-\frac{\Delta}{4a}$ es positiva si y sólo si $-\Delta > 0$, es decir, el discriminante de $P(x)$ es negativo, lo cual significa que la gráfica de la parábola no intersecta al eje X. Luego, $P(x)$ no tiene raíces reales.

Si $-\frac{\Delta}{4a}$ es negativo, la gráfica de la parábola intersecta al eje X en dos puntos x_1 y x_2, que son las raíces de $P(x)$. Observemos que en este caso se tiene que Δ es positivo, lo cual coincide con el hecho de que $P(x)$ tenga dos raíces reales. Además, el polinomio $P(x)$ alcanza su valor mínimo en el punto $x = -\frac{b}{2a}$, y dicho valor mínimo es $-\frac{\Delta}{4a}$.

Haciendo un análisis similar si $a < 0$, podemos concluir que cuando la parábola abre hacia abajo, intersectará al eje X si y sólo si $\Delta \geq 0$. Aquí, el polinomio $P(x)$ alcanza su máximo valor en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ y el valor máximo es $-\frac{\Delta}{4a}$.





Cuando la gráfica de la parábola es tangente al eje X, corresponde al caso cuando el discriminante es cero, es decir, las dos raíces son iguales.

Ejemplo 6.2.3 *Resuelva la ecuación* $4x^2 + 3x - 22 = 0$.

Usamos la fórmula (6.2) para encontrar las soluciones de la ecuación. En este caso $a = 4$, $b = 3$ *y* $c = -22$. *Usando la fórmula mencionada, obtenemos que*

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(4)(-22)}}{2(4)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+352}}{8} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{-3 \pm 19}{8}, \end{aligned}$$

de donde las soluciones son $x = 2$ *y* $x = -\dfrac{11}{4}$.

6.2.2. Ejercicios resueltos

1. Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

Solución. Usando la fórmula (6.2) con $a = 3$, $b = -7$ y $c = 2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}, \end{aligned}$$

de donde las soluciones son $x = 2$ y $x = \dfrac{1}{3}$.

2. Resolver la ecuación $6x - x^2 - 9 = 0$.

Solución. La ecuación es equivalente a la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$. Usando la fórmula (6.2) con $a = 1$, $b = -6$ y $c = 9$, obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3, \end{aligned}$$

de donde sólo hay una solución $x = 3$.

6.2.3. Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $32x^2 + 18x - 17 = 0$

b) $-64x^2 + 176x = 121$

c) $8x + 5 = 36x^2$

d) $27x^2 + 12x - 7 = 0$

e) $15x = 25x^2 + 2$

f) $x^2 - 3x + 2 = 0$

g) $9x^2 + 18x + 17 = 0$

h) $4x^2 = 8x + 5$

i) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

j) $2x^2 - 3x + 5 = 0$.

6.2.4. Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones con radicales se resuelven haciendo desaparecer el radical mediante la elevación a la potencia, que indique el índice del radical, de los dos miembros de la ecuación.

Cuando la ecuación que resulta es de segundo grado, al resolverla obtenemos las dos raíces de la ecuación, pero es necesario hacer la verificación con ambas raíces en la ecuación original, porque cuando los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, generalmente se introducen nuevas soluciones extrañas o inadmisibles. Al hacer la verificación se tiene en cuenta solamente el valor positivo del radical.

Ejemplo 6.2.4 *Resolver la ecuación* $\sqrt{4x-3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{3x-5}$.

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación se obtiene que

$$(4x-3) - 2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-2} + (x-2) = (3x-5).$$

Desarrollando ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$-2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-2} + 5x - 5 = 3x - 5,$$

ecuación que es equivalente a tener

$$-2\sqrt{4x-3}\sqrt{x-2} = -2x.$$

Cancelando el 2 *y elevando nuevamente al cuadrado, se llega a que*

$$(4x-3)(x-2) = 4x^2 - 11x + 6 = x^2,$$

es decir, tenemos la ecuación cuadrática $3x^2 - 11x + 6 = 0$*. Usando la fórmula (6.2), obtenemos que* $x = 3$ *o* $x = \frac{2}{3}$*. Haciendo la verificación se ve que el valor* $x = 3$ *satisface la ecuación dada, pero el valor* $x = \frac{2}{3}$ *es una solución extraña, que no se toma en cuenta.*
La solución correcta de la ecuación es $x = 3$*.*

6.3. Planteamiento y resolución de problemas

6.3.1. Ejercicios resueltos

1. Un comerciante compró cierto número de sacos de azúcar por 1000 pesos. Si hubiera comprado 10 sacos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado 5 pesos menos. ¿Cuántos sacos compró y cuánto le costó cada uno?

Solución. Sea x el número de sacos que compró. Entonces cada saco le costó $\frac{1000}{x}$ pesos. Si hubiera comprado 10 sacos más le hubiera costado $\frac{1000}{x+10}$, y según el enunciado

$$\frac{1000}{x+10} = \frac{1000}{x} - 5$$

$$1000x - 1000(x+10) + 5(x+10)(x) = 0.$$

Tenemos entonces

$$5x^2 + 50x - 10000 = 0$$

$$x^2 + 10x - 2000 = 0$$

$$\begin{aligned} x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(-2000)}}{2(1)} &= \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 8000}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{8100}}{2} \\ &= \frac{-10 \pm 90}{2}, \end{aligned}$$

de donde $x = 40$ o $x = -50$. Como el número de sacos no puede ser un número negativo, la respuesta es que compró $x = 40$ sacos a 25 pesos cada uno.

2. La longitud de una sala excede a su ancho en 4m. Si cada dimensión se aumenta 4m el área será el doble. Hallar las dimensiones de la sala.

Solución. Sea x el ancho de la sala de modo que la longitud es $x+4$ y el área sería $x(x+4) = x^2+4x$.

Al aumentar en 4 las dimensiones, según el enunciado tenemos

$$(x+4)(x+8) = 2(x^2+4x)$$

$$x^2+12x+32 = 2x^2+8x$$

$$x^2-4x-32 = 0$$

$$\begin{aligned} x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4(1)(-32)}}{2(1)} &= \frac{4 \pm \sqrt{16+128}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{144}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 12}{2}, \end{aligned}$$

de donde $x = 8$ o $x = -4$. Como x es el ancho de la sala, x no puede ser un valor negativo, por lo que el ancho de la sala es 8 y la longitud es 12.

6.3.2. Ejercicios

Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) La suma de dos números naturales es 14. La diferencia de sus cuadrados supera en 11 al producto de los números. ¿Cuáles son los números?

b) El número de diagonales de un polígono de n lados está dado por $D = \frac{n(n-3)}{2}$. ¿Cuántos lados tiene un poligono regular que posee 54 diagonales?

c) Determinar la longitud x del lado de un triángulo isósceles rectángulo que tiene una hipotenusa de 7.5 unidades

d) En la casa de Mario hay un jardín rectagular que tiene $96m^2$ de área. Alrededor del jadín se hace una cerca de 3m de ancho, en este caso el área total es $252m^2$. Encuentra las dimensiónes del jardín.

e) El producto de dos números es 180 y su cociente $\frac{5}{4}$. Hallar los números.

f) La edad de A hace 6 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años. Hallar la edad actual.

g) Compré cierto número de libros por 40 pesos y cierto número de plumas por 40 pesos. Cada pluma me costo un peso más que cada libro. ¿Cuántos libros compre y a qué precio si el número de libros excede al de plumas en 2?

h) Se vende un reloj en 75 pesos ganando un porcentaje sobre el costo igual al del número de pesos que me costo el reloj. Hallar el costo del reloj.

i) Para vallar una finca rectangular de $750m^2$ se han utilizado $110m$ de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

j) Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es $\frac{26}{5}$.

6.4. Solución de ecuaciones de grado mayor

Una **ecuación binomia** es de la forma

$$x^n \pm A = 0.$$

Vamos a considerar algunas ecuaciones binomias que se resuelven fácilmente por descomposición de factores.

Ejemplo 6.4.1 *1. Resolver la ecuación* $x^4 - 16 = 0$.
Descomponiendo $x^4 - 16$ *se tiene*

$$(x^2+4)(x^2-4) = (x-2i)(x+2i)(x-2)(x+2) = 0,$$

por lo que la ecuación tiene cuatro raíces $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$.

2. Resolver la ecuación $x^3 - 27 = 0$.
Descomponiendo $x^3 - 27$ *se tiene*

$$(x-3)(x^2+3x+9) = 0,$$

igualando a cero cada uno de los factores se tiene

$$x - 3 = 0, \tag{6.1}$$
$$x^2 + 3x + 9 = 0. \tag{6.2}$$

Resolviendo la ecuación (6.1) tenemos que $x = 3$*; la ecuación (6.2) se resuelve por fórmula general. Así*

$$x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{-3}}{2}.$$

La ecuación $x^3 - 27$ *tiene tres raíces* $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$, $x_3 = \frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$.

Las **ecuaciones trinomias** son aquellas que constan de tres términos de la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

donde se ve que, después de ordenada la ecuación en orden descendente con relación a x, en el primer término la x tiene un exponente doble que en el segundo término, y el tercer término es independiente de x. Ejemplos de ecuaciones trinomias son

$$x^4 + 9x^2 + 20 = 0,$$

$$x^6 + 6x^3 - 7 = 0.$$

Las ecuaciones trinomias en que el primer término tiene x^4 y el segundo x^2 se llaman ecuaciones bicuadradas.

6.4.1. Procedimiento para resolver ecuaciones trinomias

1. Escribimos la ecuación trinomia como

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0.$$

2. Aplicamos la formula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Así

$$x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3. Extraemos la raíz enésima

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Este tipo de ecuaciones tienen $2n$ raíces.

Ejemplo 6.4.2 1. *Resolver la ecuación* $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.
Esta es una ecuación bicuadrada, la cual puede escribirse como $4(x^2)^2 - 37x^2 + 9 = 0$. *Aplicando la fórmula (6.2) obtenemos el valor de* x^2*,*

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 4(4)(9)}}{8} = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 144}}{8} \\ &= \frac{37 \pm \sqrt{1225}}{8} = \frac{37 \pm 35}{8}. \end{aligned}$$

Luego, $x^2 = 9$ *o* $x^2 = \frac{1}{4}$. *Por lo tanto, las soluciones de la ecuación bicuadrada son* $x = \pm 3$ *y* $x = \pm\frac{1}{2}$.

2. *Resolver la ecuación* $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$.
Usando la fórmula (6.2), obtenemos el valor de x^3*,*

$$x^3 = \frac{19 \pm \sqrt{37^2 - 4(-216)}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{19 \pm 35}{5}.$$

Entonces, $x^3 = 27$ *o* $x^3 = -8$.

Ahora tenemos que resolver las dos ecuaciones $x^3 - 27 = 0$ *y* $x^3 + 8 = 0$. *Ambas ecuaciones se pueden factorizar como* $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9) = 0$ *y* $x^3 + 8 = (x+2)(x^2-2x+4) = 0$. *Luego, resolviendo estas ecuaciones, encontramos las soluciones* $x = 3$, $x = -2$, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$, $\dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$.

6.4.2. Solución de ecuaciones por factorización

Algunas ecuaciones se pueden resolver factorizando el primer miembro de la ecuación de modo que cada uno de los factores sea lineal, es decir, que los factores sean de la forma $(x-a)$.

Ejemplo 6.4.3 *Resolver la ecuación* $x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0$.

Factorizando el miembro derecho de la ecuación, se obtiene que

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 16x - 16 &= x^2(x+1) - 16(x+1) \\ &= (x^2-16)(x+1) \\ &= (x+4)(x-4)(x+1). \end{aligned}$$

Luego, la ecuación tiene tres raíces $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = -1$.

6.4.3. Ejercicios resueltos

1. Resolver $x^6 + 30x^3 + 81 = 0$.

Solución. Factorizando obtenemos

$$(x^3+27)(x^3+3) = 0, \quad \text{luego } \ x^3 + 27 = 0 \ \text{ o } \ x^3 + 3 = 0.$$

Ahora para resolver la ecuación binomia $x^3 + 27 = 0$ factorizamos

$$(x+3)(x^2-3x+9) = 0.$$

Usamos ahora la fórmula cuadrática para el segundo factor

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2}.$$

Para resolver la ecuación binomial $x^3 + 3 = 0$ factorizamos

$$x^3 + 3 = (x + \sqrt[3]{3})(x^2 - \sqrt[3]{3}x + (\sqrt[3]{3})^2) = 0.$$

Usamos la fórmula cuadrática para el segundo factor

$$x = \frac{\sqrt[3]{3} \pm \sqrt{(\sqrt[3]{3})^2 - 4(\sqrt[3]{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \pm \sqrt[3]{3}\sqrt{-3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i.$$

Nótese que en total hay 6 soluciones:

$$x_1 = -3, \qquad x_{2,3} = \frac{3 \pm 5i}{2}, \qquad x_4 = -\sqrt[3]{3}, \qquad x_{5,6} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2}i.$$

6.4.4. Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 16 = 0$

b) $x^6 - 729 = 0$

c) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

e) $n^4 - 27n^2 - 14n + 120 = 0$

f) $a^4 - 15a^2 - 10a + 24 = 0$

g) $4x^5 + 3x^4 - 108x^3 - 25x^2 + 522x + 360 = 0$

h) $x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 3x^2 - 6x + 45 = 0$

i) $x^7 - 20x^5 - 2x^4 + 64x^3 + 40x^2 - 128 = 0$

j) $a^6 - 8a^5 + 6a^4 + 103a^3 - 344a^2 + 396a - 144 = 0.$

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones lineales

Dos o más ecuaciones, con dos o más incognitas, son **simultáneas** cuando se satisfacen para iguales valores de las incógnitas. Así, las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

son simultáneas porque $x = 3$, $y = 2$ satisfacen ambas ecuaciones.

Ecuaciones equivalentes son las que se obtienen una de la otra. Así,

$$x + y = 4 \tag{7.1}$$
$$2x + 2y = 8 \tag{7.2}$$

son equivalentes porque multiplicando la ecuación (7.1) por 2 se obtiene la ecuación (7.2). Las ecuaciones equivalentes tienen **infinitas** soluciones comunes.

Las ecuaciones **independientes** son las que no se obtienen una de la otra. Cuando las ecuaciones independientes tienen **una sola** solución común son simultáneas.

Ecuaciones **incompatibles** son ecuaciones independiantes que no tienen solución común.

Un **sistema de ecuaciones** es la reunión de dos o más ecuaciones con dos o más incognitas. Así,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ 4x - y &= 5 \end{aligned}$$

es un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

7.1. Concepto de solución de un sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones de 2×2 tiene dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, es de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f, \end{aligned}$$

donde las incógnitas son x, y.

Resolver un sistema de ecuaciones de 2×2 es encontrar los valores x y y que satisfacen ambas ecuaciones, si es que existen.

Un sistema de ecuaciones de 3×3 tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, es decir, es de la forma

$$\begin{aligned} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z &= b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z &= b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z &= b_3, \end{aligned}$$

donde las incógnitas son x, y y z.

Resolver un sistema de ecuaciones de 3×3 es encontrar los valores x, y y z que satisfacen las tres ecuaciones, si es que existen.

Un sistema de ecuaciones de 2×2 o de 3×3 puede tener una solución, una infinidad de soluciones o ninguna.

7.2. Resolución de sistemas de 2×2 y 3×3

Primero vamos a estudiar los diferentes métodos para resolver ecuaciones de 2×2.

7.2.1. Método de igualación

Resolver el sistema

$$7x + 4y = 13 \tag{7.3}$$
$$5x - 2y = 19. \tag{7.4}$$

Despejamos cualquiera de las incógnitas, por ejemplo x, en ambas ecuaciones para obtener

$$x = \frac{13 - 4y}{7}, \qquad x = \frac{19 + 2y}{5}.$$

Ahora se **igualan** las últimas dos ecuaciones, para tener que

$$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5},$$

y ya tenemos una ecuación con una sola incógnita. Resolviendo esta ecuación se obtiene que $y = -2$. Sustituyendo el valor de y en cualquiera de las ecuaciones (7.3) o (7.4) se llega a que

$$x = \frac{13 - 4(-2)}{7} = 3.$$

Por lo que $x = 3$, $y = -2$ es la solución del sistema.

Ejemplo 7.2.1 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 7 \\ 2x - y &= -4. \end{aligned}$$

Despejamos a y *de la primera y segunda ecuación*

$$y = \frac{7 - 3x}{5}, \qquad y = 2x - 4.$$

Ahora igualamos ambas expresiones para y*, para despejar* x

$$\frac{7 - 3x}{5} = 2x + 4, \qquad 7 - 3x = 10x + 20$$

$$13x = -13, \qquad x = -1.$$

Sustituimos ahora el valor $x = -1$ *en cualquiera de las expresiones para* y*, para obtener*

$$y = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2.$$

Las soluciones son $x = -1$, $y = 2$.

Obsérvese que no importa cuál de las incógnitas se despeja en ambas ecuaciones el resultado será el mismo.

7.2.2. Método de sustitución

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= -24 \qquad (7.5) \\ 8x - 3y &= 19. \qquad (7.6) \end{aligned}$$

Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo x, en una de las ecuaciones. Vamos a despejar x en la ecuación (7.5). Luego

$$x = \frac{-24 - 5y}{2}.$$

Este valor de x se **sustituye** en la ecuación (7.6),

$$8\left(\frac{-24-5y}{2}\right)-3y=19,$$

y ya tenemos una sola ecuación con una incógnita. Resolviendo esta ecuación se obtiene que $y=-5$. Sustituyendo el valor de y en la ecuación donde se despejo x, tenemos que

$$x=\frac{-24-5(-5)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Por lo que $x=\frac{1}{2}$, $y=-5$ es la solución del sistema.

Ejemplo 7.2.2 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} x+6y &= 27 \\ 7x-3y &= 9. \end{aligned}$$

Iniciamos despejando a x en la primera ecuación, $x=27-6y$. Se sustituye ahora este valor de x en la segunda eucación y se despeja y

$$7(27-6y)-3y=9, \qquad 189-42y-3y=9, \qquad 45y=180 \;\; o \;\; y=4.$$

Se sutituye $y=4$ en la primera ecuación para obtener

$$x+(6)(4)=27$$

$$x=27-24=3.$$

Así $x=3$, $y=4$ es la solución.

7.2.3. Método de suma o resta

Resolver el sistema

$$5x+6y = 20 \tag{7.7}$$
$$4x-3y = -23. \tag{7.8}$$

En este método se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas. Vamos a igualar los coeficientes de y en ambas ecuaciones por que es lo más sencillo.

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (7.8) por el coeficiente de y en la ecuación (7.7) dividido entre el coeficiente de y de la ecuación (7.8), es decir, multiplicamos por $\frac{6}{-3}=-2$.

Obtenemos el sistema de ecuaciónes

$$\begin{aligned} 5x + 6y &= 20 \\ -8x + 6y &= 46. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente al sistema original, lo que significa que tienen la misma solución. Luego restamos la ecuación (7.9) de la ecuación (7.7),

$$\begin{array}{rrcr} 5x & 6y & = & 20 \\ 8x & -6y & = & 20 \\ \hline 13x & & = & -26. \end{array}$$

Despejamos x, en la ecuación $13x = -26$, se obtiene que

$$x = \frac{-23}{13} = -2.$$

Sustituyendo el valor de x en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la ecuación (7.7), se tiene $5(-2) + 6y = 20$. Despejando, tenemos que $y = 5$. Por lo que $x = -2$, $y = 5$ es la solución del sistema.

Ejemplo 7.2.3 *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} 10x + 18y &= -11 \\ 16x - 9y &= -5. \end{aligned}$$

Multiplicando todos los términos de la segunda ecuación por 2 *obtendremos el nuevo sistema*

$$\begin{aligned} 10x + 18y &= -11 \\ 32x - 18y &= -10. \end{aligned}$$

Ahora sumamos ambas ecuaciones, combinando términos semejantes para obtener:

$$42x = -21, \qquad x = -\frac{1}{2}.$$

Sustituimos $x = -\frac{1}{2}$ *en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener*

$$10\left(-\frac{1}{2}\right) + 18y = -11, \qquad 18y = -6, \qquad y = -\frac{1}{3}.$$

Las soluciones son entonces $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$. *Una vez más observamos que no importa cuál de las incógnitas se elije para ser eliminada, el resultado será el mismo.*

Ejemplo 7.2.4 *Resolver el sistema:*

$$\begin{aligned} 3x-(9x+y) &= 5y-(2x+9y) \\ 4x-(3x+7) &= 5y-47. \end{aligned}$$

En ocasiones se debe desarrollar la expresión antes de aplicar los métodos explicados anteriormente, así el sistema anterior se convierte

$$\begin{aligned} -6x-y &= -2x-4y \\ 4x-3y-7 &= 5y-47, \end{aligned}$$

que finalmente se puede expresar como

$$\begin{aligned} -4x+3y &= 0 \\ 4x-8y &= -40. \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el método de suma y resta, de donde $-5y=-40$, $y=8$. *Sustituyendo en la otra ecuación se obtiene que* $-4x+3(8)=0$ *o* $x=6$.

Ejemplo 7.2.5 *Ahora vamos a resolver un sistema de* 3×3.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ 2x-y+z &= 7 \\ x+2y-z &= 6. \end{aligned}$$

Para eliminar la incógnita z *restamos la segunda ecuación a la primera ecuación, para obtener* $-x+2y=5$. *Luego sumamos la segunda y la tercera ecuación para obtener* $3x+y=13$.

Luego, tenemos un nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -x+2y &= 5 \\ 3x+y &= 13. \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver con cualquiera de los métodos anteriores, despejando x *de la primer ecuación obtenemos* $x=2y-5$. *La cual sustituimos en la segunda ecuación*

$$3(2y-5)+y=13,$$

$$6y-15+y=13,$$

$$7y=28, \qquad y=4.$$

Regresando a la primera ecuación tenemos $x=2(4)-5=3$. *Estos valores se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener* z

$$(3)+(4)+z=12, \qquad z=5.$$

Las soluciones son entonces $x=3$, $y=4$, $z=5$.

7.2.4. Método del determinante

Una **matriz de** 2×2 es un arreglo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son números reales. El **determinante** de la matriz anterior, que denotamos por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es el número real definido por $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Una **matriz de** 3×3 es un arreglo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

donde, nuevamente, cada a_{ij} es un número. Los subíndices nos indican la posición del número en el arreglo. Así, a_{ij} se encuentra en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. Definimos el **determinante de una matriz de** 3×3 por la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Es decir, nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz de 2×2 obtenida al eliminar el primer renglón y la j-ésima columna, y después sumando todo esto, pero recordando poner un signo negativo antes de a_{12}. Cabe aclarar que el resultado del determinante no se altera si en lugar de escoger el primer renglón como primer paso escogemos el segundo o el tercero. En caso de que escojamos el segundo renglón iniciamos con un signo negativo y si escogemos el tercer renglón el primer signo es positivo, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Los signos se van alternando, siguiendo el siguiente diagrama

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Los determinantes cumplen varias propiedades, que son inmediatas de las definiciones, las más útiles son las siguientes.

Propiedades 7.2.6 (a) *Al intercambiar dos renglones consecutivos o dos columnas consecutivas, el signo del determinante cambia, por ejemplo,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(b) *Se puede sacar un factor común a cualquier renglón o columna de una matriz y los determinantes se relacionan de la siguiente manera, por ejemplo,*

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(c) *Si a un renglón (o columna) le sumamos otro renglón (o columna), el valor del determinante no cambia, por ejemplo,*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \left(o \begin{vmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \right). \end{aligned}$$

(d) *Si una matriz tiene dos renglones (o dos columnas) iguales el determinante es cero.*

Ejemplos. Calculemos los determinantes de las matrices dadas.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - (-5)(1) = -1.$

3. $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (-2)(-9) - (-3)(-5) = 3.$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s, \end{aligned}$$

el cual tiene solución, usando alguno de los métodos anteriores,

$$x = \frac{rd - bs}{ad - bc} \quad \text{y} \quad y = \frac{as - cr}{ad - bc}.$$

Entonces, note que la solución puede ser escrita en términos de discriminantes de matrices de la siguiente manera

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ac - cr}{ad - bc}.$$

Si el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, significa que el sistema tiene infinidad de soluciones o que no tiene solución.

Si el determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, significa que el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 7.2.7 *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 5 \\ 4x + 7y &= 27. \end{aligned}$$

Calculamos x *y* y *usando determinantes*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{35 - 81}{35 - 12} = \frac{-46}{23} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} == \frac{135 - 20}{23} = \frac{115}{23} = 5.$$

7.2.5. Ejercicios

Resolver los sistemas de ecuaciones dados.

a) Resolver por suma y resta: $9x + 16y = 7$; $4y - 3x = 0$.

b) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación: $10x - 3y = 36$; $2x - 5y = -4$.

c) Resolver por sustitución $15x - 11y = -87$; $-12x - 5y = -27$.

d) Resolver por determinantes: $8x + 9y = 0$; $2x + 5y + 3y = \frac{7}{2}$.

e) $6x + 3y + 2z = 12$; $9x - y + 4z = 37$; $10x + 5y + 3z = 21$.

f) $3x - 4y - 2(2x - 7) = 0$; $5(x - 1) - (2y - 1) = 0$.

g) $2x + 4y + 3z = 3$; $10x - 8y - 9z = 0$; $4x + 4y - 3z = 2$.

h) $\dfrac{x+1}{10} = \dfrac{y-4}{5}$; $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-2}{10}$.

i) $5x - 3z = 2$; $2z - y = -5$; $x + 2y - 4z = 8$.

j) $2x + 3y + z = 1$; $6x - 2y - z = -14$; $3x + y - z = 1$.

7.3. Planteamiento de problemas

7.3.1. Ejercicios resueltos

1. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 13, y si al número se le resta 45 las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución. Sean x la cifra de las decenas y y la cifra de las unidades, de modo que el número es $10x + y$. Según el enunciado del problema $x + y = 13$ y además $10x + y - 45 = 10y + x$.

Entonces tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ 9x - 9y &= 45, \end{aligned}$$

que se puede simplificar como

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ x - y &= 5. \end{aligned}$$

Despejando x de la primer ecuación, tenemos $x = 13 - y$ lo cual sustituimos en la segunda ecuación, para obtener

$$13 - y - y = 5, \qquad 2y = 8, \qquad y = 4.$$

Regresando a la primera ecuación obtenemos $x = 13 - 4 = 9$. El número que buscamos es entonces 94.

2. Se tiene que 5 kilos de azúcar, 3 de café y 4 de frijoles cuestan 118; 4 de azúcar, 5 de café y 3 de frijoles cuestan 145; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan 46. Hallar el precio del kilo de cada mercancía.

Solución. Sean x los kilos de azúcar, y los kilos de café y z los kilos de frijoles. Según el enunciado tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 4z &= 118 \\ 4x + 5y + 3z &= 145 \\ 2x + y + 2z &= 46. \end{aligned}$$

De la ultima ecuación despejamos y,

$$y = 46 - 2x - 2z$$

y la sustituimos en las dos otras ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x + 3(46 - 2x - 2z) + 4z &= 118 \\ 4x + 5(46 - 2x - 2z) + 3z &= 145. \end{aligned}$$

Para obtener el nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2z &= 20 \\ 6x + 7z &= 85. \end{aligned}$$

Despejando x de ambas ecuaciones obtenemos

$$x = 20 - 2z, \qquad x = \frac{85 - 7z}{6}.$$

Igualamos y resolvemos para z

$$20 - 2z = \frac{85 - 7z}{6}, \qquad 120 - 12z = 85 - 7z,$$
$$5z = 35, \qquad z = 7.$$

Ahora sustituimos para encontrar el valor de x

$$x = 20 - 2(7) = 20 - 14 = 6.$$

Por último sustituimos estos dos valores en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de y

$$y = 46 - 2x - 2x = 46 - 2(6) - 2(7) = 46 - 12 - 14 = 20.$$

De esta manera tenemos que el azúcar cuesta 6 el kilo, el café cuesta 20 el kilo y el frijoles cuesta 7 el kilo.

7.3.2. Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios.

a) En un examen de 20 preguntas la nota de Juan ha sido un 8. Si cada acierto vale un punto y cada error resta 2 puntos, ¿Cuántas preguntas ha acertado y cuántas preguntas ha fallado Juan?

b) Si se le suman 3 al numerador de una fracción y se le restan 2 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{6}{7}$, pero si se resta 5 al numerador y se suma 2 al denominador, la fracción es igual a $\frac{2}{5}$. Hallar la fracción.

c) Calcula un número sabiendo que la suma de sus dos cifras es 10; y que si invertimos el orden de dichas cifras, el número obtenido es 36 unidades mayor que el original.

d) Seis veces el ancho de una sale excede en 4 m a la longitud de la sala, y si la longitud aumentada en 3 mse divide entre el ancho, el cociente es 5 y el residuo es 3. Hallar las dimensiones de la sala.

e) 5 trajes y 3 sombreros cuestan 4180 pesos, y 8 trajes y 9 sombreros 6940. Hallar el precio de un traje y un sombrero.

f) Si un número de dos cifras se disminuye en 17 y esta diferencia se divide entre la suma de sus cifras, el cociente es 5, y si el número disminuido en 2 se divide entre la cifra de las unidades disminuida en 2 el cociente es 19. Hallar el número.

g) En un cine hay 700 personas entre adultos y niños. Cada adulto pagó 40 pesos y cada niño 15 pesos por su entrada. La recaudación es de 18000. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine?

h) Sig al doble de la edad de A se suma la edad B, se obtiene la edad de C aumentada en 32 años. Si al tercio de la edad de B se le suma el doble de la de C, se obtiene la de A aumentada en 9 años. Finalmente, el tercio de la suma de las edades de A y B es 1 año menos que la edad de C. Hallar las edades respectivas.

i) 5 kilos de azúcar, 3 de café, y 4 de frijoles, cuestan 1.18 pesos; 4 de azúcar, 5 de café, y 3 de frijoles cuestan 1.45 pesos; 2 de azúcar, 1 de café y 2 de frijoles cuestan 46 centavos. Hallar el precio de un kilo de cada mercancía.

j) Ayer gané 10 más que hoy. Si lo que gané hoy es los $\frac{5}{6}$ de lo que gané ayer. ¿Cuánto gané cada día?

Capítulo 8

Desigualdades

Una **desigualdad** es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra. Por ejemplo, $5 < 15$, $a + b > c$, $-5 < -1$.

Se llama **primer miembro** de una desigualdad a la expresión que está a la izquierda y **segundo miembro** a la que está a la derecha del signo de la desigualdad.

Propiedades de las desigualdades.

Propiedades 8.0.1 (a) *Si a dos miembros de una desigualdad se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía. Así, dada la desigualdad $a < b$, podemos escribir*

$$a + c < b + c,$$
$$a - c < b - c.$$

Consecuencia. *Un término cualquiera de una desigualdad se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.*

(b) *Si dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varia. Así, dada la desigualdad $a < b$ y siendo c una cantidad positiva, podemos escribir*

$$ac < bc,$$
$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

(c) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa, el signo de la desigualdad varía. Así, si en la desigualdad $a < b$ multiplicamos ambos miembros por $-c$, tendremos*

$$-ac > -bc,$$

$$-\frac{a}{c} > -\frac{b}{c}.$$

(d) *Si cambia el orden de los miembros, la desigualdad cambia de signo. Así, si* $a > b$ *es evidente que* $b < a$.

(e) *Al tomar los recíprocos de los dos miembros, la desigualdad cambia de signo. Así, siendo* $a < b$ *se tiene que*

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

(f) *Si los miembros de una desigualdad son positivos y se elevan a una misma potencia positiva, el signo de la desigualdad no cambia. Así,* $3 < 5$, *elevando al cuadrado* $3^2 < 5^2$, *es decir,* $9 < 25$.

(g) *Si los dos miembros o uno de ellos es negativo y se elevan a una potencia impar, el signo de la desigualdad no cambia. Así,* $-5 < -3$, *elevando al cubo,* $(-5)^3 < (-3)^3$, *es decir,* $-125 < -27$.

(h) *Si los dos miembros son negativos y se elevan a una misma potencia par positiva, el signo de la desigualdad cambia. Así,* $-5 < -3$, *elevando al cuadrado,* $(-3)^2 = 9$ *y* $(-5)^2 = 25$, $(-5)^2 > (-3)^2$.

(i) *Si los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les extrae una misma raíz positiva, el signo de la desigualdad no cambia. Así, si* $a < b$, $0 < a$ *y* n *es positivo, se tiene que*

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

(j) *Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro a miembro, resulta una desigualdad del mismo signo. Así, si* $a < b$ *y* $c < d$, *se tiene que*

$$a + c < b + d,$$

$$ac < bd.$$

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifican para determinados valores de las incógnitas.

Así, la desigualdad $2x - 3 > x + 5$ es una inecuación por que tiene la incógnita x y sólo se verfica para cualquier valor de x mayor que 8. En efecto, para $x = 8$ se convertiría en igualdad y para $x < 8$ se convertiría en una desigualdad de signo contrario.

Resolver una inecuación es hallar los valores de las incógnitas que satisfacen la inecuación.

8.1. Desigualdades de primer grado

8.1.1. Ejercicios resueltos

1. Encuentra el conjunto solución de la desigualdad $x + 5 > 2$.

Solución. Sumando -5 a ambos lados de la desigualdad, obtenemos

$$x + 5 - 5 > 2 - 5$$

$$x > -3.$$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}.$$

2. Hallar el conjunto solución de la desigualdad $x + 2(4x - 5) > 5(2x - 3)$.

Solución.

$$x + 2(4x - 5) > 5(2x - 3)$$

$$x + 8x - 10 > 10 < -15$$

$$9x - 10 > 10x - 15$$

$$9x + 5 > 10x$$

$$5 > x.$$

Por lo que el conjunto solución es $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$.

3. Determinar el conjunto solución de la desigualdad

$$3(2x - 5) - 7(1 - x) \geq -4(4 - 3x).$$

Solución. Aplicando la ley distributiva para eliminar los paréntesis, tenemos

$$6x - 15 - 7 + 7x \geq -16 + 12x.$$

Al reducir términos semejantes, se obtiene

$$13x - 22 \geq -16 + 12x.$$

Sumando $(22 - 12x)$ a ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$13x - 22 + 22 - 12x \geq -16 + 12x + 22 - 12x$$

$$x \geq 6.$$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$.

8.1.2. Ejercicios

Resolver las siguientes desigualdades.

a) $3(x-5)-4(4-3x) \geq 2(7-x)-3(x-5)$.

b) $3x-14 < 7x-2$.

c) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$.

d) $-6 < -\frac{2}{5}(1-x) \leq 4$.

e) $\frac{2}{3}[x-(1-\frac{x-2}{3})]+1 \leq x$.

f) $\frac{3x+1}{2} \geq x - \frac{5x-9}{6}$.

g) $2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10$.

h) $3x - 4 + \frac{x}{4} < \frac{5x}{2} + 2$.

i) $\frac{2x+2}{5} < \frac{3x-6}{10}$.

j) $\frac{x+3}{4} - \frac{x+2}{3} < 2$.

8.2. Ecuaciones y desigualdades con valor absoluto

8.2.1. Ejercicios resueltos

1. Hallar el conjunto solución de $|2x+3| = 9$.

Solución. Primer caso, cuando $2x+3 \geq 0$, esto es, $x \geq -\dfrac{3}{2}$,

$$|2x+3| = 2x+3.$$

La ecuación se convierte entonces en

$$\begin{aligned} |2x+3| &= 2x+3 = 9 \\ 2x &= 9-3 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

El conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de $x \geq -\frac{3}{2}$ y $x = 3$. El conjunto solución es entonces $\{3\}$.

Segundo caso, cuando $2x+3 < 0$, es decir, $x < -\frac{3}{2}$

$$|2x+3| = -(2x+3) = -2x-3.$$

La ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}|2x+3| &= -2x-3=9\\ -2x &= 9+3\\ x &= -6.\end{aligned}$$

El conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de $x < -\frac{3}{2}$ y $x = -6$. El conjunto solución es entonces $\{-6\}$.

El conjunto solución es la unión de los conjuntos solución de los dos casos. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-6, 3\}$.

2. Determinar el conjunto solución de $|2x-5| = x+3$.

Solución. El primer caso es cuando $2x-5 \geq 0$, esto es, $x \geq \frac{5}{2}$. Se tiene así que $|2x-5| = 2x-5$. Luego

$$\begin{aligned}2x-5 &= x+3\\ 2x-x &= 3+5\\ x &= 8.\end{aligned}$$

El conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de $x \geq \frac{5}{2}$ y $x = 8$, por lo que el conjunto solución es $\{8\}$.

Segundo caso, es decir, $x < \frac{5}{2}$ si $2x-5<0$. Resulta que $|2x-5| = -(2x-5) = -2x+5$. De esta manera, $|2x-5| = x+3$ se convierte en

$$\begin{aligned}-2x+5 &= x+3\\ -2x-x &= 3-5\\ x &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

El conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de $x < \frac{5}{2}$ y $x = \frac{2}{3}$. El conjunto solución es $\{\frac{2}{3}\}$.

Luego, el conjunto solución de $|2x-5| = x+3$ es la unión de los conjuntos solución de los dos casos. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{\frac{2}{3}, 8\}$.

3. Determinar el conjunto solución de $|2x-3| \geq 1$.

Solución. $|2x-3| \geq 1$ es equivalente a

$$\begin{aligned}2x-3 \geq 1 &\quad \text{cuando} \quad 2x-3 \geq 0, \quad \text{o bien}\\ -(2x-3) \geq 1 &\quad \text{cuando} \quad 2x-3 \leq 0.\end{aligned}$$

Ahora, resolvemos cada desigualdad y consideramos la unión entre ambas soluciones, $x \geq 2$ cuando $2x-3 \geq 0$ unión $-2x+3 \geq 1$ cuando $2x-3 \leq 0$. Es decir, se tiene que la solución es

$$x \geq 2 \ \text{ y } \ x \geq \frac{3}{2} \quad \text{unión} \quad 1 \geq x \ \text{ y } \ x \leq \frac{3}{2}.$$

Resolviendo cada lado de la unión, se obtiene que $x \geq 2$ unión $x \leq 1$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \ \text{ o } \ x \leq 1\}$.

8.2.2. Ejercicios

Resolver las siguientes desigualdades.

a) $|3x+1| \geq 2|x-6|$

b) $|x+2| > 3$

c) $|-4x+8| \leq 5$

d) $|2x-5| < 4$

e) $|3x+8| \geq 2$

f) $|\frac{x}{7} - \frac{1}{6}| < \frac{1}{3}$

g) $|3x-7| \leq 2$

h) $|3x-2| < 4$

i) $|4x+2| \geq 6$

j) $|2x-1| \geq 3$.

Capítulo 9

Funciones elementales

9.1. Logaritmo

El **logaritmo** de un número dado es el **exponente** al que tenemos que elevar otro número llamado **base** para obtener el número dado. Como

$$5^0 = 1, \;\; 5^1 = 5, \;\; 5^2 = 25, \;\; 5^3 = 125,$$

luego, siendo la **base 5** el logaritmo de 1 (se escribe $\log_5(1)$) es 0, por que 0 es el exponente al que tenemos que elevar la base 5 para obtener 1. Luego,

$$\log_5(1) = 0, \;\; \log_5(5) = 1, \;\; \log_5(25) = 2, \;\; \log_5(125) = 3.$$

Cualquier número positivo se puede tomar como base de un sistema de logaritmos. Los sistemas de logaritmos usados generalmente son dos, el sistema de **logaritmos vulgares** o de **Briggs**, cuya base es 10, y el sistema de **logaritmos naturales o Neperianos**, cuya base es el número

$$e = 2.71828182845\ldots.$$

Propiedades de los logaritmos. Sea b la base del logaritmo, la ecuación $b^y = A$, será equivalente a escribir

$$\log_b(A) = y.$$

Propiedades 9.1.1 (a) *La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa.*

(b) *Los números negativos no tienen logaritmo.*

(c) *En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es* 1*, es decir,*

$$\log_b(b) = 1.$$

(d) *El logaritmo de* 1 *es* 0*, es decir,*

$$\log_b(1) = 0.$$

(e) *Los números mayores que* 1 *tienen logaritmo positivo, es decir, si* $A > 1$ *se tiene que*

$$\log_b(A) > 0.$$

(f) *Los números menores que* 1 *tienen logaritmo negativo, es decir, si* $0 < A < 1$ *se tiene que*

$$\log_b(A) < 0.$$

(g) *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. Así,*

$$\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B).$$

(h) *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. Así,*

$$\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B).$$

(i) *El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base. Así,*

$$\log_b(A^n) = n\log_b(A).$$

(j) *El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz. Así,*

$$\log_b(\sqrt[n]{A}) = \frac{\log_b(A)}{n}.$$

9.1.1. Ejercicios resueltos

1. Encuentre y si $y = \log_4 8$.

Solución. Escriba $y = \log_4 8$ en una forma exponencial equivalente, es decir

$$8 = 4^y, \quad 2^3 = 2^{2y},$$

$$2y = 3, \quad y = \frac{3}{2}.$$

2. Encuentre x si $\log_3 x = -2$.

Solución. Escriba $\log_3 x = -2$ en forma exponencial equivalente

$$x = 3^{-2},$$

$$x = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

3. Encuentre b si $\log_b 1000 = 3$.

Solución. Escriba $\log_b 1000 = 3$ en forma exponencial equivalente

$$1000 = b^3, \text{ luego } 10^3 = b^3, \text{ de donde } b = 10.$$

4. Si $\log_e 3 = 1.1$ y $\log_e 7 = 1.95$, encuentre $\log_e(\frac{7}{3})$ y $\log_e \sqrt[3]{21}$.

Solución.

$$\log_e \left(\frac{7}{3}\right) = \log_e 7 - \log_e 3 = 1.95 - 1.1 = 0.85$$

$$\begin{aligned} \log_e \sqrt[3]{21} = \log_e (21)^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{3}\log_e (3)(7) = \frac{1}{3}(\log_e 3 + \log_e 7) \\ &= \frac{1}{3}(1.1 + 1.95) = 1.01. \end{aligned}$$

5. Encuentre x tal que $\log_b x = \frac{2}{3}\log_b 27 + 2\log_b 2 - \log_b 3$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log_b x &= \frac{2}{3}\log_b 27 + 2\log_b 2 - \log_b 3 = \log_b 27^{\frac{2}{3}} + \log_b 2^2 - \log_b 3 \\ &= \log_b 9 + \log_b 4 - \log_b 3 = \log_b \frac{(9)(4)}{3} = \log_b 12. \end{aligned}$$

Así, $\log_b x = log_b 12$, por lo tanto $x = 12$.

9.1.2. Ejercicios

Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log(x+3) + \log x = 1$.

b) $\log(3x+2) = 2\log 2 + \log(2x-1)$.

c) $\log 5 + \log x = 2$.

d) $\log(6x+3) - \log 3 = \log(5x-3) + \log 4$.

e) $\log x + \log(x-3) = 1$.

f) $\log_2 8 = x$.

g) $\log x - \log 5 = \log 2 - \log(x-39)$.

h) $\log x - \log 8 = 1$.

i) $\log(\log x) = 1$.

j) $\log(6x+3) - \log 3 = \log 2 - \log x$.

9.2. Función exponencial

Se dice que P es una función **exponencial** de x (la variable es x) con **base** a si

$$P = P_0 a^x,$$

siendo P_0 la cantidad inicial (cuando $x = 0$ tenemos $P = P_0$) y a es un factor de cambio de P, cuando x aumenta en 1. Si $a > 1$ se trata de un crecimiento exponencial; si $a < 1$ se trata de una disminución exponencial.

Ejemplo 9.2.1 *Si $a = 2$ y $P_0 = 3$, hacemos variar x para tener la ecuación $P = 3(2)^x$, entonces por ejemplo se tiene que*

$$3(2)^0 = 3, \;\; 3(2)^1 = 6, \;\; 3(2)^2 = 12, \;\; 3(2)^3 = 24, \;\; 3(2)^5 = 96.$$

Propiedades de los exponentes.

A continuación se presentan la lista de las definiciones y propiedades necesarias para manipular los exponentes, algunas de las cuales ya hemos revisado en estas notas.

(a) $a^0 = 1$,

(b) $a^1 = a$,

(c) $a^{-1} = \frac{1}{a}$,

(d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,

(e) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$,

(f) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$,

(g) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$,

(h) $a^x a^t = a^{x+t}$,

(i) $\frac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$,

(j) $(a^x)^t = a^{xt}$.

(k) Si $x < 0$ tenemos que $0 < a^x < 1$.

(l) Si $x > 0$ tenemos que $a^x > 1$.

9.2.1. Ejercicios resueltos

1. Despeje x de $4^{x-3} = 8$.

Solución. Exprese ambos lados en términos de la misma base,

$$4^{x-3} = 8, \qquad (2^2)^{x-3} = 2^3$$

$$2^{2x-6} = 2^3, \qquad 2x - 6 = 3$$

$$2x = 9, \qquad x = \frac{9}{2}.$$

2. Despeje x de $27^{x+1} = 9$.

Solución. Exprese ambos lados en términos de la misma base,

$$27^{x+1} = 9, \qquad (3^3)^{x+1} = 3^2,$$

$$3^{3x+3} = 3^2, \qquad 3x + 3 = 2,$$

$$3x = -1, \qquad x = -\frac{1}{3}.$$

3. Tiempo de duplicación. Para cierta bacteria se halla que su tiempo de dupicación es de 25 minutos. Supóngase que no hay ningún cambio en el tiempo de duplicación y que se inicia con un cultivo de 1000 bacterias. ¿Cuántas bacterias estarán presentes en 10 minutos?, ¿y en 5 horas?

Solución. La fórmula que usaremos es

$$P(t) = (1000)2^{\frac{t}{25}},$$

donde el tiempo t se mide en minutos. Para $t = 0$ se tiene que

$$P(10) = (1000)2^{\frac{10}{25}} = (1000)2^{\frac{2}{5}} = 1000\sqrt[5]{4} \approx 1320.$$

Para $t = 300$ obtenemos $P(300) = (1000)2^{\frac{300}{25}} = (1000)2^12 = 4,096,000.$

4. Decaimiento radiactivo. El isótopo del galio 67 usado en el diagnóstico de tumores malignos, tiene una vida media de 46.5 horas. Si se empieza con 100 miligramos del isótopo, ¿cuántos miligramos quedarán después de 24 horas?, ¿después de una semana?

Solución. Se usa el modelo de decaimiento de vida media

$$A = A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}} = A_0 2^{-\frac{t}{h}}.$$

Tomando $A_0 = 100$ y $h = 46.5$, se obtiene

$$A = 100(2^{-\frac{t}{46.5}}).$$

El valor de A cuando $t = 24$ horas es

$$A = 100(2^{-\frac{24}{46.5}}) = 69.9 \text{ miligramos}.$$

El valor de A cuando $t = 168$ horas (una semana=168 horas) es

$$A = 100(2^{-\frac{168}{46.5}}) = 8.17 \text{ miligramos}.$$

5. Medicina - Crecimiento bacteriano. El cólera es una enfermedad intestinal causada por la bacteria del cólera que se miltiplica exponencialmente por la división de células modelada por

$$N = N_0 e^{1.38t},$$

donde N es el número de bacterias presentes despues de t horas y N_0 es el número de bacterias presentes cuanto t=0. Si se empieza con una bacteria, ¿cuántas bacterias habrá en 5 horas?

Solución. Utilice $N_0 = 1$ y $t = 5$ para obtener que

$$N = N_0 e^{1.386t} = e^{1.386(5)} = 1020.$$

9.2.2. Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $e^{2x-1} = e^x$

b) $e^x e^{-3} = e^{5x} e^{-2} e^{-x}$

c) $e^{e^{e^{x}}} = e^e$

d) $4^{x+1} - 2^x = 0$

e) $2^{3x-5} = 5$

f) $2^{x^2-7} = \frac{1}{8}$

g) $10^{5x-2} = 100$

h) $\frac{5}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

i) $e^{x-1} \cdot e^{x+1} = e^{4x-4}$

j) $10^{6x-1} \cdot 10^{3x+1} = 10^{2x^2}$.

9.3. Funciones trigonométricas

Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Si denotamos por $AB = c$, $BC = a$ y $CA = b$, tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$, y si hacemos $\alpha = \angle BAC$ y $\beta = \angle ABC$, podemos definir las funciones trigonométricas **seno** y **coseno** de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{a}{c}, \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c}. \end{aligned}$$

Estas funciones se pueden extender para que esten definidas para cualquier ángulo entre 0 y 2π, y de hecho para cualquier número real. Las otras 4 funciones trigonométricas son las siguientes.

1. $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$,
2. $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$,
3. $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$,

4. $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

Algunas identidades de las funciones trigonométricas son las siguientes.

1. $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$,
2. $\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$,
3. $\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$,
4. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$,
5. $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(y)\cos(x)$,
6. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$,
7. $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$,
8. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$,
9. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$,
10. $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$,
11. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(y)$,
12. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$,
13. $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$,
14. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$,
15. $\tan^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$.

9.3.1. Ejercicios

Calcular el valor exacto sin usar tablas o calculadora de las siguientes expresiones.

a) $\cos 0$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

c) $\cos -\frac{\pi}{6}$

d) $\cot \frac{3\pi}{2}$

e) $\csc \frac{5\pi}{6}$

f) $\sec \frac{11\pi}{6}$

g) $\tan -\frac{4\pi}{3}$

h) $\sec -\frac{\pi}{6}$

i) $\operatorname{sen} -\frac{\pi}{4}$

j) $\csc -\pi$.

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Álgebra*. Grupo editorial Patria, 2012.

[2] R. Barnett, M. R. Ziegler, K. E. Byleen. *Precálculo. Funciones y gráficas*. McGraw Hill, 2000.

[3] R. Bulajich, J. A. Gómez, R. Valdez . *Algebra*. *Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas*, Instituto de Matemáticas, UNAM - Olimpiada Mexicana de Matemáticas, UNAM, 2014.

[4] R. David Gustafson, P. Frisk. *Beginning and Intermediate Algebra*. Brooks/Cole-Thomson Learning, 2005.